

## Маленькие линейные представления

- A8◊1.** Постройте приводимое неразложимое представление аддитивной группы  $\mathbb{Z}$ .
- A8◊2.** Опишите все ассоциативные  $\mathbb{R}$ -подалгебры с единицей размерности  $> 31$  в  $\text{Mat}_{6 \times 6}(\mathbb{R})$ .
- A8◊3.** Пусть конечная группа  $\mathfrak{G}$  действует на  $V = \mathbb{C}^n$  перестановками базисных векторов. Как связано значение характера  $\chi_V(g)$  с числом неподвижных точек перестановки  $g$ ?
- A8◊4.** Выразите через характеры  $\chi_U$  и  $\chi_W$  представлений  $U$  и  $W$  конечной группы  $\mathfrak{G}$  характер представления
- |  |                        |                         |                 |                              |
|--|------------------------|-------------------------|-----------------|------------------------------|
|  | <b>а)</b> $U \oplus W$ | <b>б)</b> $U \otimes W$ | <b>в)</b> $U^*$ | <b>г)</b> $\text{Hom}(U, W)$ |
|--|------------------------|-------------------------|-----------------|------------------------------|
- Далее, покажите, что
- |  |  |
|--|--|
| <b>д)</b> $\chi_{S^2 U} = (\chi_U^2(g) + \chi_U(g^2)) / 2$ | <b>е)</b> $\chi_{\Lambda^2 U} = (\chi_U^2(g) - \chi_U(g^2)) / 2$ |
|--|--|
- и вычислите **ж\*)**  $\chi_{\Lambda^2 V}$  **з\*)**  $\chi_{S^2 V}$ .
- A8◊5.** Для произвольного линейного представления группы треугольника  $\mathfrak{S}_3$  выясните, какими могут быть собственные значения входящих в эту группу операторов и как действует оператор, представляющий симметрию треугольника, на собственных подпространствах оператора, представляющего поворот.
- A8◊6.** Перечислите все неприводимые представления группы  $\mathfrak{S}_3$  и найдите их характеры.
- A8◊7.** Пусть  $V$  — двумерное неприводимое представление группы  $\mathfrak{S}_3$ .
- а)** Верно ли, что  $S^{n+6}(V) = S^n(V) \oplus R$ , где  $R$  — это регулярное представление?
  - б)** Опишите разложение всех  $S^n(V)$  в сумму неприводимых представлений.
  - в)** Опишите пространство  $\mathfrak{S}_3$ -инвариантных полиномов на  $V$ .
  - г)** Вычислите характеры всех  $V^{\otimes n}$  и разложите их на неприводимые.
  - д)** Покажите, что  $S^2(S^3(V)) \simeq S^3(S^2(V))$  **е\*)** Изоморфны ли  $S^k(S^m(V))$  и  $S^m(S^k(V)) \forall k, m$ ?
- A8◊8.** Опишите все неприводимые представления группы диэдра  $\mathfrak{D}_n$  и их характеры.
- A8◊9.** Вычислите характеры представлений симметрической группы  $\mathfrak{S}_4$ : тривиального, знакового, 2-мерного через эпиморфизм на группу треугольника и двух 3-мерных собственной группой куба и несобственной группой тетраэдра. Есть ли среди них приводимые? А изоморфные? Опишите все неприводимые представления  $\mathfrak{S}_4$  и выясните как они раскладываются на неприводимые представления  $\mathfrak{S}_3 \subset \mathfrak{S}_4$ , вложенной в как стабилизатор 4-го элемента.
- A8◊10.** Опишите все неприводимые представления знакопеременной группы  $\mathfrak{A}_4$ , вычислите их характеры и выясните, как неприводимые представления  $\mathfrak{S}_4$  раскладываются на неприводимые при ограничении на  $\mathfrak{A}_4$ .
- A8◊11.** Разложите в сумму неприводимых представление собственной группы куба в пространстве  $\mathbb{C}$ -значных функций на множестве его **а)** вершин **б)** рёбер **в)** граней.
- A8◊12.** На гранях куба написали числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, как на игральной кости. За один ход каждое из них заменяют на среднее арифметическое чисел, стоящих на четырёх соседних гранях. Вычислите с точностью до второго знака после запятой, что будет написано на гранях после 2006 ходов. Изменится ли ответ, если числа расставить на гранях по-другому?
- A8◊13.** Найдите размерности, вычислите характеры и разложите на приводимые представления  $\mathfrak{S}_5$ :
- а)** тривиальное  $U$ , знаковое  $U'$ , симплициальное  $V$ ,  $V' = V \otimes U'$  и  $\Lambda^2 V$
  - б)**  $W$  в функциях на  $\mathbb{P}_1(\mathbb{F}_5)$  с нулевой суммой значений (см. зад. A6 ◊ 10) и  $W' = W \otimes U'$
  - в)**  $S^2 W$ ,  $\Lambda^2 W$ ,  $S^2 W$ ,  $V \otimes W$
- A8◊14.** Опишите все неприводимые представления группы икосаэдра  $\mathfrak{A}_5$ , вычислите их характеры и выясните, как раскладываются ограничения на  $\mathfrak{A}_5$  неприводимых представлений  $\mathfrak{S}_5$ .
- A8◊15.** **а)** **б)** **в)** Решите аналог зад. A8◊11 для икосаэдра.
- A8◊16.** Составьте таблицы неприводимых характеров группы: **а)** кватернионных единиц **б)**  $\text{SL}_2(\mathbb{F}_3)$  **в)** группы Гейзенберга  $H(\mathbb{F}_3) \subset \text{SL}_3(\mathbb{F}_3)$  верхних унитарных матриц.