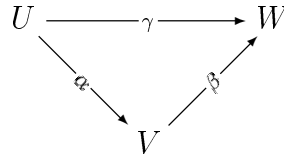


## Диаграммный поиск

**Терминология.** Всюду далее речь идёт про произвольные абелевы группы. Композиция гомоморфизмов абелевых групп  $\varphi\psi$  называется *точной*, если  $\ker \varphi = \text{im } \psi$ . Цепочка гомоморфизмов называется *точной*, если композиция любых двух её последовательных элементов точна. Диаграмма гомоморфизмов называется *коммукативной*, если различные цепочки стрелок, ведущие из одной группы в другую, одинаково действуют на любой элемент первой группы. Напомним также, что  $\text{coker } (U \xrightarrow{\varphi} W) \stackrel{\text{def}}{=} W/\text{im } \varphi$ .

**A7◊1.** В идущем далее наборе утверждений про коммукативный треугольник



верные утверждения докажите, а неверные — опровергните конкретными контрпримерами.

- |   |   |   |
|---|---|---|
| а) $\alpha, \beta$ эпи $\Rightarrow \gamma$ эпи               | б) $\alpha, \beta$ моно $\Rightarrow \gamma$ моно           | в) $\gamma$ эпи $\Rightarrow \alpha$ эпи                  |
| г) $\gamma$ эпи $\Rightarrow \beta$ эпи                       | д) $\gamma$ моно $\Rightarrow \alpha$ моно                  | е) $\gamma$ моно $\Rightarrow \beta$ моно                 |
| ж) если $\alpha$ эпи, то ( $\gamma$ эпи $\iff \beta$ эпи)     | з) если $\alpha$ эпи, то ( $\gamma$ моно $\iff \beta$ моно) | и) если $\beta$ эпи, то ( $\gamma$ эпи $\iff \alpha$ эпи) |
| и) если $\beta$ эпи, то ( $\gamma$ эпи $\iff \alpha$ эпи)     | к) если $\beta$ эпи, то ( $\gamma$ моно $\iff \alpha$ моно) |   |
| л) если $\gamma$ изоморфизм, то $\alpha$ моно, а $\beta$ эпи. |   |   |

**A7◊2.** Какие из перечисленных ниже импликаций верны для коммукативной диаграммы с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (1)$$

- а)  $\varphi$  изоморфизм  $\iff (\varphi'$  моно &  $\varphi''$  эпи)      б)  $\varphi', \varphi''$  изоморфизмы  $\Rightarrow \varphi$  изоморфизм.

**A7◊3 (лемма о пяти гомоморфизмах).** Рассмотрим коммукативную диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} V_1' & \longrightarrow & V_2' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V_2'' & \longrightarrow & V_1'' \\ \varphi_1' \downarrow & & \varphi_2' \downarrow & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi_2'' & & \downarrow \varphi_1'' \\ W_1' & \longrightarrow & W_2' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W_2'' & \longrightarrow & W_1'' \end{array}$$

Влечёт ли а) биективность б) инъективность в) сюръективность четырёх боковых стрелок  $\varphi_1', \varphi_1'', \varphi_2', \varphi_2''$  одноимённое свойство центральной стрелки  $\varphi$ ?

**A7◊4.** Покажите, что имеется единственный гомоморфизм  $V' \xrightarrow{\varphi'} W'$ , дополняющий диаграмму с точными строками

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi'' & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

до коммукативной. При каком условии  $\varphi'$  инъективен?

**A7◊5.** Тот же вопрос про диаграмму

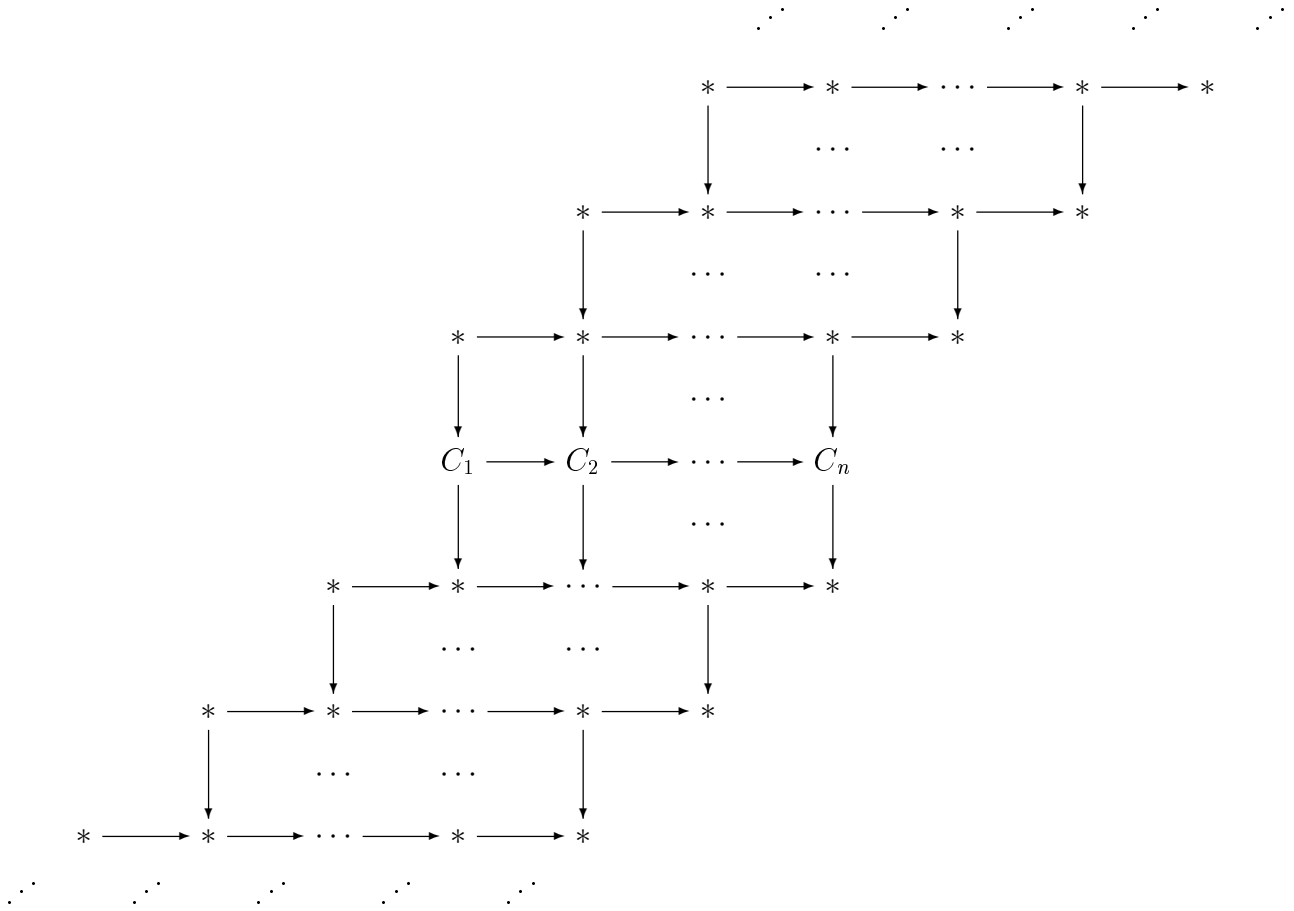
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V' & \longrightarrow & V & \longrightarrow & V'' & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \varphi' & & \downarrow \varphi & & & & \\ 0 & \longrightarrow & W' & \longrightarrow & W & \longrightarrow & W'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

но требуется найти достаточное условие для сюръективности  $\varphi''$ .

**A7◊6 (лемма о змее).** Для диаграммы (1) с точными строками постройте длинную точную последовательность

$$0 \longrightarrow \ker \varphi' \longrightarrow \ker \varphi \longrightarrow \ker \varphi'' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi' \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi \longrightarrow \operatorname{coker} \varphi'' \longrightarrow 0 .$$

**A7◊7.** Рассмотрим бесконечную коммутативную диаграмму из ведущих вниз и направо стрелок, ненулевые элементы которой сосредоточены в области



(стрелки продолжаются и за пределы этой области, но выходят из нулей и входят в нули, которые мы не изобразили). Допустим, что в этой диаграмме все столбцы и все строки кроме строки  $C$  точны, и известно, что где-то выше строки  $C$  и где-то ниже строки  $C$  есть целиком нулевые строки. Покажите, что строка  $C$  точна, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- а) нулевая строка стоит непосредственно над строкой  $C$ ;
- б) нулевая строка стоит непосредственно под строкой  $C$ ;
- в) строка  $C$  является комплексом (т. е. композиция любых двух последовательных стрелок в ней нулевая).