§13. Представления симметрических групп

13.1. Действие S_n на заполненных диаграммах Юнга. Напомним, что диаграмма Юнга λ, в каждой клетке которой стоит какая-нибудь буква алфавита $[1..m] = \{1, 2, \dots , m\}$ (при этом могут использоваться не все буквы, и используемые буквы могут повторяться), называется *заполнением* формы λ. Заполнение T называется *стандартным*, если число букв совпадает с числом клеток диаграммы: $m = |\lambda|$, и каждая буква используется ровно один раз. Заполнение T называется *таблицей*, если его символы нестрого возрастают слева направо вдоль строк диаграммы и строго возрастают сверху вниз вдоль столбцов. Число всех таблиц формы λ в алфавите $[1..m]$ мы обозначаем через $d_\lambda(m)$, а число стандартных таблиц формы λ — через d_λ.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и с каждым стандартным заполнением T формы $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k)$ с $\sum \lambda_i = n$ свяжем две подгруппы $R_T, C_T \subset S_n$, которые будем называть *строчной* и *столбцовой* подгруппами заполнения T. Строчная подгруппа R_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждой строки заполнения T. Аналогично, столбцовая подгруппа C_T состоит из всех перестановок, сохраняющих содержимое каждого столбца. Таким образом,

$$R_T \simeq S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots \times S_{\lambda_k}\,, \quad C_T \simeq S_{\lambda^t_1} \times S_{\lambda^t_2} \times \cdots \times S_{\lambda^t_m}\,,$$

где $\lambda^t = (\lambda^t_1, \lambda^t_2, \dots, \lambda^t_m)$ — транспонированная к λ диаграмма.

Упражнение 13.1. Убедитесь в том, что симметрическая группа S_n транзитивно действует перестановками букв на стандартных заполнениях фиксированной формы λ, и для любой перестановки $g \in S_n$

$$R_{gT} = gR_Tg^{-1} \qquad \text{и} \qquad C_{gT} = gC_Tg^{-1} \tag{13-1}$$

Нашей ближайшей целью является комбинаторное описание множества перестановок

$$R_T \cdot C_T = \{g = pq \mid p \in R_T,\ q \in C_T\}\,.$$

Прежде всего заметим, что поскольку $R_T \cap C_T = \{e\}$, то представление перестановки $g \in S_n$ в виде $g = pq$ с $p \in R_T$ и $q \in C_T$ единственно, если существует. Далее, если $U = pqT$, то никакие два элемента, расположенные в одной строке заполнения T не могут оказаться в одном столбце заполнения U. Верно и обратное, но чтобы убедиться в этом потребуется одна комбинаторная лемма.

Определение 13.1
Скажем, что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ и будем писать $\lambda \trianglerighteq \mu$, если $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Упражнение 13.2. Убедитесь, что доминирование является отношением частичного порядка на множестве всех диаграмм Юнга заданного веса n и приведите пример двух несравнимых 6-клеточных диаграмм.

Лемма 13.1
Если форма μ стандартного заполнения U не является строго доминирующей над формой λ стандартного заполнения T одного и того же веса $|\mu| = |\lambda|$, то имеет место ровно одна из двух взаимоисключающих возможностей:

- либо найдутся два числа, стоящие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения U,
- либо $\lambda = \mu$ и $pT = qU$ для некоторых $p \in R_T$ и $q \in C_U$.

Доказательство. Пусть все элементы каждой из строк заполнения T находятся в разных столбцах заполнения U.

Поскольку все элементы первой строки T лежат в разных столбцах U, выполняется неравенство $\lambda_1 \leqslant \mu_1$ и существует перестановка $q_1 \in C_U$, переводящая все элементы из первой строки заполнения T в первую строку заполнения q_1U.

Поскольку все элементы второй строки T также лежат в разных столбцах, существует не затрагивающая элементов из первой строки заполнения T перестановка $q_2 \in C_{q_1U} = C_U$, такая что в заполнении q_2q_1U каждый элемент второй строки заполнения T стоит либо во второй строке, либо — если он находится в столбце высоты 1 — в первой. В частности, $\lambda_1+\lambda_2 \leqslant \mu_1+\mu_2$.

Продолжая в том же духе, мы получим последовательность перестановок $q_1, q_2, \dots, q_k \in C_U$ (где k — количество строк в диаграмме μ), в которой $q_i \in C_{q_{i-1}\cdots q_1U} = C_U$ оставляет на месте все элементы из первых $i-1$ строк заполнения T, а также все элементы i-той строки T, лежащие в заполнении $q_{i-1}\cdots q_1U$ в столбцах высоты $< i$, и переводит все остальные элементы из i-той строки T в i-тую строку заполнения $q_iq_{i-1}\cdots q_1U$. В частности, $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_i \leqslant \mu_1+\mu_2+\dots+\mu_i$ при каждом i. По условию леммы эти неравенства возможны только при $\lambda=\mu$, и в этом случае каждая перестановка q_i переводит элементы i-той строки заполнения T в точности в i-тую строку заполнения $q_iq_{i-1}\cdots q_1U$. Поэтому $q_k\cdots q_1U = pT$ для некоторого $p \in R_T$. □

Следствие 13.1
Перестановка $g \in S_n$ тогда и и только тогда имеет вид $g = pq$ для некоторых $p \in R_T$, $q \in C_T$, когда никакие два элемента из одной строки T не лежат в одном столбце gT.

Доказательство. Если $U = pqT$, где $p \in R_T$, $q \in C_T$, то элементы из одной строки T очевидно лежат в разных столбцах U. Наоборот, пусть никакие два элемента из одной строки заполнения T не лежат в одном столбце заполнения $U = gT$. По лем. 13.1 найдутся перестановки $p \in R_T$ и $q \in C_U$, такие что $pT = qU = qgT$, откуда $p = qg$. Записывая $q \in C_{gT} = gC_Tg^{-1}$ как gq_1g^{-1} с $q_1 \in C_T$, получаем $g = pq_1^{-1}$, что и требовалось. □

13.2. Симметризаторы Юнга. Элементы групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$

$$r_T = \sum_{\sigma\in R_T} \sigma\,, \quad c_T = \sum_{\sigma\in C_T} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot\sigma\,, \tag{13-2}$$

$$s_T = r_T\cdot c_T = \sum_{\substack{p\in R_T\\ q\in C_T}} \operatorname{sgn}(q)\cdot pq \tag{13-3}$$

называются, соответственно, *строчным*, *столбцовым* и *полным симметризаторами Юнга*. Они обладают следующими очевидными свойствами:

$$r_{gT} = gr_Tg^{-1}\,,\ c_{gT} = gc_Tg^{-1}\,,\ s_{gT} = gs_Tg^{-1} \qquad \forall\, g\in S_n \tag{13-4}$$

$$pr_T = r_Tp = r_T \qquad \forall\, p\in R_T \tag{13-5}$$

$$\operatorname{sgn}(q)\cdot qc_T = \operatorname{sgn}(q)\cdot c_Tq = c_T \qquad \forall\, q\in C_T \tag{13-6}$$

$$\operatorname{sgn}(q)ps_Tq = s_T \qquad \forall\, p\in R_T \quad \text{и} \quad \forall\, q\in C_T\,. \tag{13-7}$$

Замечательно, что полный симметризатор $s_T \in \mathbb{C}[S_n]$ однозначно с точностью до пропорциональности *определяется* свойством (13-7). Точнее, имеет место

Лемма 13.2
Векторное подпространство $E_T = \{\sigma\in\mathbb{C}[S_n] \mid \operatorname{sgn}(q)p\sigma q = \sigma\ \forall\, p\in R_T\ \forall\, q\in C_T\}$ одномерно и линейно порождается симметризатором s_T.

Доказательство. Покажем, что всякий элемент $\sigma = \sum\limits_{g\in S_n} x_gg \in \mathbb{C}[S_n]$, лежащий в пространстве E_T, равен $x_e\cdot s_T$. Условие $\operatorname{sgn}(q)p\sigma q = \sigma$ означает, что $x_{pgq} = \operatorname{sgn}(q)\cdot x_g$ для любого $g\in S_n$. Полагая $g = e$, получаем $x_{pq} = \operatorname{sgn}(q)\cdot x_e$, откуда $\sigma = x_e\cdot s_T + \sum\limits_{g\notin R_TC_T} x_gg$. Проверим, что все коэффициенты

x_g в последней сумме нулевые. Если $g \notin R_T C_T$, то по сл. 13.1 найдутся два элемента, лежащие в одной строке заполнения T и в одном столбце заполнения $U = gT$. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит в R_T и в $C_U = gC_T g^{-1}$. Из второго вытекает, что $g^{-1}\tau g \in C_T$. Полагая $p = \tau$, $q = g^{-1}\tau g$ в равенстве $x_{pgq} = \mathrm{sgn}(q) \cdot x_g$, получаем $x_g = -x_g$, откуда $x_g = 0$. □

Лемма 13.3
Если заполнения T и U имеют различную форму, то

$$r_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot c_U = c_U \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot r_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_U = 0\,.$$

Доказательство. Достаточно показать, что $r_T \cdot g \cdot c_U = c_U \cdot g \cdot r_T = 0$ для любо $g \in S_n$. Допустим, что форма заполнения T лексикографически больше формы заполнения U и рассмотрим сначала случай $g = e$. По лем. 13.1 какие-то два элемента из одной строки заполнения T лежат в одном столбце заполнения U. Транспозиция $\tau \in S_n$ этих двух элементов лежит как в R_T, так и в C_U. Поэтому

$$\begin{gathered} r_T \cdot c_U = (r_T \cdot \tau) \cdot c_U = r_T \cdot (\tau \cdot c_U) = -r_T \cdot c_U \\ c_U \cdot r_T = -(c_U \cdot \tau) \cdot r_T = -c_U \cdot (\tau \cdot r_T) = -c_U \cdot r_T\,, \end{gathered}$$

откуда $r_T \cdot c_U = c_U \cdot r_T = 0$ для любых заполнений T и U, таких что форма T лексикографически больше формы U. Для произвольного $g \in S_n$ получаем тогда

$$\begin{gathered} r_T \cdot g \cdot c_U = r_T \cdot g c_U g^{-1} \cdot g = (r_T \cdot c_{gU}) \cdot g = 0 \\ c_U \cdot g \cdot r_T = c_U \cdot g r_T g^{-1} \cdot g = (c_U \cdot r_{gT}) \cdot g = 0 \end{gathered}$$

поскольку по уже доказанному $r_T \cdot c_{gU} = 0 = c_U \cdot r_{gT}$. Если форма заполнения T лексикографически меньше формы заполнения U применим к элементам $r_T \cdot g \cdot c_U$ и $c_U \cdot g \cdot r_T$ *антиподальный антиавтоморфизм* групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, действующий на базисные элементы $g \in S_n$ по правилу $g \longmapsto g^{-1}$. Поскольку этот антиавтоморфизм оставляет симметризаторы r_T и c_T на месте и оборачивает порядок сомножителей в произведениях, равенства $r_T \cdot g \cdot c_U = c_U \cdot g \cdot r_T = 0$ превратятся в уже установленные равенства $r_U \cdot g \cdot c_T = c_T \cdot g \cdot r_U = 0$. □

Лемма 13.4
$s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$, причём $s_T^2 = n_\lambda \cdot s_T$, где n_λ — положительное число, зависящее только от формы λ заполнения T и равное $n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\right)$.

Доказательство. Из равенств (13-5) – (13-7) вытекает, что при любом $x \in \mathbb{C}[S_n]$ элемент $s_T \cdot x \cdot s_T$ обладает свойством (13-7) и, тем самым, лежит в одномерном пространстве $E_T = \mathbb{C} \cdot s_T$ из лем. 13.2. В частности, $s_T^2 = n_T \cdot s_T$ для некоторого $n_T \in \mathbb{C}$. Чтобы найти n_T, вычислим двумя способами след оператора правого умножения на элемент s_T:

$$\mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{x \mapsto x \cdot s_T} \mathbb{C}[S_n]$$

С одной стороны, из формулы (13-3) вытекает, что для любого $g \in S_n$ коэффициент при g у произведения $g \cdot s_T$ равен единице, откуда $\mathrm{tr}\,(s_T) = |S_n| = n!$. С другой стороны, левый идеал $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ является S_n-подмодулем левого регулярного представления S_n, и поскольку все представления S_n вполне приводимы, найдётся дополнительный S_n-подмодуль $W \subset \mathbb{C}[S_n]$, такой что $\mathbb{C}[S_n] = W \oplus \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$. Правое умножение на s_T переводит $W \subset \mathbb{C}[S_n]$ внутрь $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$, а на идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ действует как умножение на n_T. Поэтому $\mathrm{tr}\,(s_T) = n_T \cdot \dim\left(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\right)$. Таким образом, n_T отлично от нуля и равно $n!/\dim\left(\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T\right)$.

Для любого другого заполнения $U = gT$ той же формы, что и T, векторное подпространство $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_U = g \cdot (\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T) \cdot g^{-1}$ получается из подпространства $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ действием автоморфизма сопряжения элементом g

$$\mathbb{C}[S_n] \xrightarrow{x \mapsto g x g^{-1}} \mathbb{C}[S_n]\,.$$

Поэтому левые идеалы $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_U$ и $\mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ изоморфны как левые S_n-модули и, в частности, имеют одинаковую размерность. Тем самым число $n_T = n_{\lambda(T)}$ зависит только от формы $\lambda = \lambda(T)$ заполнения T. □

Теорема 13.1

Представление S_n левыми умножениями в идеале $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ неприводимо. Два таких представления V_T и V_U изоморфны тогда и только тогда, когда заполнения T и U имеют одинаковую форму $\lambda = \lambda(T) = \lambda(U)$. Если для каждой n-клеточной диаграммы Юнга λ произвольным образом зафиксировать некоторое стандартное заполнение T_λ, то неприводимые представления $V_\lambda = V_{T_\lambda}$ составят полный список попарно неизоморфных неприводимых представлений S_n.

Доказательство. Пусть $W \subset V_T$ является S_n-инвариантным подмодулем. Отметим, что перестановочный с левым умножением на S_n проектор $\pi_W : \mathbb{C}[S_n] \twoheadrightarrow W$ представляет собой оператор правого умножения на элемент $w = \pi(1) \in W$, т. к. для любого $x \in \mathbb{C}[S_n]$ имеем $\pi_W(x) = \pi_W(x \cdot 1) = x \cdot \pi_W(1) = x \cdot w$.

Поскольку $s_T \cdot W \subset s_T \cdot V_T = s_T \cdot \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T = \mathbb{C} \cdot s_T$, для левого действия элемента s_T на подмодуле W имеются ровно две возможности: либо $s_T \cdot W = 0$, либо $s_T \cdot W = \mathbb{C} \cdot s_T$. В первом случае

$$W \cdot W \subset V_T \cdot W = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \cdot W = 0\,,$$

откуда $w \cdot w = 0$, а значит правое умножение на w аннулирует $W = \mathbb{C}[S_n] \cdot w$ и $W = 0$. Во втором случае $s_T \in s_T \cdot W \subset W$, откуда $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T \subset W$, т. е. $W = V_T$. Таким образом, модуль V_T неприводим.

Как мы видели в конце доказательства лем. 13.4, представления V_T и $V_{gT} = gV_Tg^{-1}$, отвечающие любым двум заполнениям одинаковой формы, изоморфны. Если заполнения T и U имеют разные формы, то по лем. 13.3 левое умножение на s_T аннулирует модуль V_U, тогда как на модуле V_T оно, по лем. 13.4, действует умножением на ненулевое число $n_{\lambda(T)}$. Поэтому представления V_T и V_U не изоморфны. Последнее утверждение теоремы следует из того, что попарно неизоморфных неприводимых представлений V_λ получилось ровно столько, сколько классов сопряжённых элементов в S_n. □

13.2.1. Симметризаторы $s'_T = c_T \cdot r_T$. Множества R_TC_T и C_TR_T, вообще говоря, различны. Например, для стандартного заполнения $T = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ они различаются содержащимся в них циклом длины три: в R_TC_T это цикл $|12\rangle \circ |13\rangle = |132\rangle$, а в C_TR_T — цикл $|13\rangle \circ |12\rangle = |123\rangle$.

Таким образом, перестановка сомножителей в формуле (13-3) позволяет написать ещё один симметризатор

$$s'_T = c_T \cdot r_T = \sum_{\substack{p \in R_T \\ q \in C_T}} \operatorname{sgn}(q) \cdot qp \tag{13-8}$$

который, вообще говоря, не равен симметризатору $s_T = r_T \cdot c_T$. Как элементы групповой алгебры s'_T и s_T переводятся друг в друга *антиподальным антиавтоморфизмом* групповой алгебры $\mathbb{C}[S_n]$, действующим на базисные элементы $g \in S_n$ по правилу $g \mapsto g^{-1}$.

Упражнение 13.3. Сформулируйте и докажите для симметризатора s'_T аналоги соотношения (13-7), лем. 13.3, лем. 13.4 и теор. 13.1.

Предложение 13.1

Представления S_n левыми умножениями в идеалах $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ и $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$ изоморфны.

Доказательство. Операторы правого умножения на c_T и r_T являются гомоморфизмами левых S_n-модулей

$$V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot c_Tr_T \underset{x \mapsto x \cdot r_T}{\overset{x \mapsto x \cdot c_T}{\rightleftarrows}} \mathbb{C}[S_n] \cdot r_Tc_T = V_T$$

Композиция $x \mapsto x \cdot r_T c_T = x \cdot s_T$ действует на $V_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_T$ умножением на ненулевую константу $n_{\lambda(T)}$. Таким образом, операторы правого умножения на $n_\lambda^{-1/2} c_T$ и $n_\lambda^{-1/2} r_T$ являются взаимно обратными изоморфизмами представлений. $\square$

Следствие 13.2

Неприводимые представления V_λ и V_{λ^t}, отвечающие транспонированным диаграммам λ и λ^t, получаются друг из друга тензорным умножением на одномерное знаковое представление.

Доказательство. Обозначим через $\sigma : \mathbb{C}[S_n] \longrightarrow \mathbb{C}[S_n]$ — *знаковый автоморфизм* групповой алгебры, который задаётся на базисных элементах $g \in S_n$ правилом $g \mapsto \operatorname{sgn}(g) \cdot g$. Выберем какое-нибудь стандартное заполнение T формы λ и рассмотрим транспонированное заполнение T^t транспонированной диаграммы λ^t. Тогда $R_{T^t} = C_T$, $C_{T^t} = R_T$ и

$$s_{T^t} = \sum_{\substack{p \in R_T \\ q \in C_T}} \operatorname{sgn}(p) \cdot qp = \sum_{\substack{p \in R_T \\ q \in C_T}} \operatorname{sgn}(q) \cdot \operatorname{sgn}(pq) \cdot qp = \sigma\left(s'_T\right) .$$

Тензорное произведение представления V_λ на одномерное знаковое представление изоморфно представлению S_n в пространстве $V'_T = \mathbb{C}[S_n] \cdot s'_T$, заданному правилом $g : x \cdot s'_T \longmapsto \operatorname{sgn}(g) \cdot gx \cdot s'_T$. Автоморфизм σ изоморфно отображает это пространство на $V_{\lambda^t} = \mathbb{C}[S_n] \cdot s_{T^t}$ и переводит это действие в стандартное действие левым умножением $g : \sigma(x) \cdot s_{T^t} \longmapsto g\sigma(x) \cdot s_{T^t}$. $\square$

13.3. Модуль таблоидов M^λ. Орбита стандартного заполнения T под действием строчной подгруппы R_T называется *таблоидом* формы λ. Мы будем обозначать таблоид, получающийся из заполнения T, через $\{T\}$. Таблоиды фиксированной формы λ биективно соответствуют левым смежным классам S_n/R_T, и группа S_n действует на них левыми умножениями. Таким образом возникает представление S_n на пространстве формальных линейных комбинаций (с комплексными коэффициентами) таблоидов формы λ. Это представление иначе можно описать как представление S_n, индуцированное с тривиального одномерного представления подгруппы $R_T \subset S_n$. Оно называется *модулем таблоидов* и обозначается M^λ.

Упражнение 13.4. Покажите, что представление S_n в пространстве M^λ изоморфно представлению S_n левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n] \cdot r_T$.

13.3.1. Характер модуля M^λ принято обозначать через ψ_λ. Рассмотрим класс сопряжённости $C_\mu \in \operatorname{cl}(S_n)$, состоящий из всех перестановок циклового типа μ, и обозначим через m_j число строк длины j в диаграмме μ.

Предложение 13.2

Значение $\psi_\lambda(C_\mu)$ равно коэффициенту при одночлене $x^\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ в симметрическом многочлене Ньютона $p^m(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n}$, где $p_k(x) = \sum_i x_i^k$.

Доказательство. Поскольку каждый элемент $g \in S_n$ действует на M^λ некоторой перестановкой базисных векторов, след $\operatorname{tr}(g)$ равен числу таблоидов $\{T\}$ формы λ, таких что $\{gT\} = \{T\}$. Последнее означает, что каждый цикл перестановки g действует в пределах какой-либо одной строки заполнения T. Таблоид $\{T\}$, в i-той строке которого находится ϱ_{ij} непересекающихся циклов длины j из перестановки g, можно составить $m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n! / \prod_{ij} \varrho_{ij}!$ способами[1].

Таким образом,

$$\psi_\lambda(C_\mu) = \operatorname{tr}(g) = \sum_{\varrho_{ij}} \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_n!}{\prod_{ij} \varrho_{ij}!} \tag{13-9}$$

[1] все такие таблоиды составляют одну орбиту группы $S_{m_1} \times S_{m_2} \times \cdots \times S_{m_n}$, переставляющей между собою циклы одинаковой длины, и стабилизатор данного таблоида состоит из $\prod_{ij} \varrho_{ij}!$ перестановок циклов внутри строк

где сумма берётся по всем наборам неотрицательных целых чисел ϱ_{ij}, удовлетворяющих условиям

$$\sum_i \varrho_{ij} = m_j \quad \text{и} \quad \sum_j j \cdot \varrho_{ij} = \lambda_i \,. \tag{13-10}$$

С другой стороны, m_i-тая степень j-той степенной суммы Ньютона раскладывается как

$$p_j(x)^{m_i} = (x_1^j + x_2^j + \cdots + x_n^j)^{m_i} = \sum_{\varrho_{ij}} \frac{m_i!}{\varrho_{1j}!\varrho_{2j}!\cdots\varrho_{nj}!} x_1^{j\cdot\varrho_{1j}} x_2^{j\cdot\varrho_{2j}} \cdots x_n^{j\cdot\varrho_{nj}}$$

где сумма берётся по всем наборам неотрицательных целых чисел ϱ_{ij}, удовлетворяющих первому условию из (13-10). Перемножая такие разложения по всем j получаем при $x_1^{\lambda_1}x_2^{\lambda_2}\cdots x_n^{\lambda_n}$ в точности коэффициент (13-9). □

Упражнение 13.5. Выведите формулу (13-9) из формулы для характера индуцированного представления из 12-1.

13.4. Модуль Шпехта S^λ. Для каждого заполнения T формы λ рассмотрим в модуле таблоидов M^λ вектор

$$v_T = c_T\{T\} = \sum_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\cdot\{qT\}\,. \tag{13-11}$$

Поскольку ни при каком $q \in C_T$ никакие два элемента из одного столбца T не могут оказаться в одной строке qT, равенство $q_1T = pq_2T$ невозможно ни при каких $q_1, q_2 \in C_T$ и $p \in R_{q_2T}$, т. е. все слагаемые в правой сумме (13-11) суть *различные* базисные векторы пространства таблоидов M^λ, взятые с коэффициентами ±1. В частности, каждый из векторов v_T отличен от нуля.

Линейная оболочка векторов (13-11), полученных из всех возможных заполнений T формы λ, является S_n-подмодулем, поскольку

$$gv_T = gc_T\{T\} = gc_Tg^{-1}\{gT\} = c_{gT}\{gT\} = v_{gT} \qquad \forall\, g\in S_n\,.$$

Этот подмодуль обозначается S^λ и называется *модулем Шпехта*.

Лемма 13.5
Если форма λ заполнения T не является строго доминирующей диаграмму μ, то

$$c_TM^\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } \mu \neq \lambda \\ \mathbb{C}\cdot v_T & \text{при } \mu = \lambda\,. \end{cases}$$

Доказательство. Если в пересечении $R_U \cap C_T$ имеется хоть одна транспозиция τ, то

$$c_T\{U\} = c_T\{\tau U\} = c_T\cdot\tau\{U\} = -c_T\{U\}\,, \tag{13-12}$$

откуда $c_T\{U\} = 0$. Согласно лем. 13.1, в условиях нашей леммы такой транспозиции нет, только когда U и T имеют одинаковую форму λ и $pU = qT$ для некоторых $p \in R_U$ и $q \in C_T$. В этом случае $c_T\{U\} = c_T\{pU\} = c_T\{qT\} = \operatorname{sgn}(q)\cdot c_T\{T\} = \pm v_T$, что и утверждалось. □

Теорема 13.2
Модуль Шпехта S^λ изоморфен неприводимому представлению V_λ левыми умножениями в идеале $\mathbb{C}[S_n]\cdot s_T$ (где T — произвольное заполнение формы λ).

Доказательство. Покажем сначала, что S^λ неприводим. Если бы существовало разложение $S^\lambda = V \oplus W$ в сумму S_n-подмодулей, то каждый оператор c_T, построенный по заполнению T формы λ, переводил бы каждое из слагаемых в себя. Однако по лем. 13.5 $c_TS^\lambda \subset c_T\cdot M^\lambda = \mathbb{C}\cdot v_T$. Тем самым, ненулевой вектор v_T лежит ровно в одном из слагаемых — скажем, в V. Но тогда V содержит и все остальные векторы $v_{gT} = gv_T$, а значит, совпадает с S^λ.

Из лем. 13.5 следует также, что все неприводимые представления S^λ попарно неизоморфны: при $\lambda(T) < \mu$ оператор c_T аннулирует модуль $S^\mu \subset M^\mu$, а на модуле S^λ действует нетривиально:

$$c_T v_T = c_T c_T\{T\} = |C_T| \cdot c_T\{T\} = |C_T| \cdot v_T\,.$$

Таким образом, S^λ изоморфен ровно одному из неприводимых представлений $V_\mu = \mathbb{C}[S_n] \cdot r_U c_U$, где U — произвольное заполнение формы μ. По лем. 13.3 левое умножение на c_T аннулирует все идеалы V_μ с $\mu \neq \lambda$. Поэтому $S^\lambda \simeq V_\lambda$. □

Следствие 13.3
Разложение модуля таблоидов M^λ в прямую сумму неприводимых подмодулей имеет вид

$$M^\lambda = S^\lambda \oplus \bigoplus_{\mu \rhd \lambda} S^{\mu \oplus k_{\mu\lambda}}$$

т. е. S^λ входит в M^λ с кратностью один, а все остальные подмодули разложения отвечают диаграммам μ, строго доминирующим диаграмму λ (см. опр. 13.1).

Доказательство. Поскольку оператор c_T переводит M^λ внутрь S^λ и нетривиально действует на S^λ, никаких других прямых слагаемых, изоморфных S^λ, в M^λ нет, т. е. S^λ входит в M^λ с кратностью 1. Если существует инъективный гомоморфизм $S^\mu \longrightarrow M^\lambda$, то оператор c_U, отвечающий произвольному заполнению U формы μ, должен нетривиально действовать на M^λ. Но если $\mu \neq \lambda$ не является строго доминирующим над λ, то $c_U M^\lambda = 0$ по лем. 13.5. □

13.4.1. Стандартный базис модуля Шпехта. Упорядочим все стандартные заполнения T формы λ, полагая $T \succ U$, если наибольшее из чисел, стоящих в заполнениях T и U в разных клетках, встречается в столбцовой развёртке[1] заполнения T раньше, чем в столбцовой развёртке заполнения U.

Упражнение 13.6. Проверьте, что это отношение транзитивно.

Например, 120 стандартных заполнений формы $\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array}$ выстроятся по убыванию так:

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 3&1\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&2\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&1\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\ \hline 4&3\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&3\\ \hline 4&1\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\ \hline 4&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&1\\ \hline 3&2\\ \hline 5\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \cdots$$

$$\cdots \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\ \hline 2&3\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 2&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 1&4\\ \hline 3\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\ \hline 3&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 1&5\\ \hline 3&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 1&4\\ \hline 2\\ \cline{1-1}\end{array} \succ \begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\ \hline 2&4\\ \hline 1\\ \cline{1-1}\end{array}.$$

Главная особенность введённого порядка в том, что для любой стандартной *таблицы* T и любых $p \in R_T$ и $q \in C_T$ выполняются строгие неравенства $pT \succ T \succ qT$, поскольку самое большое число в любом цикле перестановки p сдвигается влево, а самое большое число в любом цикле перестановки q — вверх. В частности, если T — таблица, а $U \prec T$ — любое заполнение, то $\{T\} \neq \{U\}$, поскольку T — минимальный элемент орбиты $R_T T$.

Упражнение 13.7. Пусть U и V — стандартные *таблицы* и $U \succ T$. Покажите, что $c_T\{U\} = 0$.

Теорема 13.3
Векторы v_T, где T пробегает множество стандартных таблиц формы λ, образуют в S^λ базис.

[1] напомним, что столбцовая развёртка заполнения T диаграммы λ — это слово, которое получится если читать заполнение T по столбцам, двигаясь в каждом столбце *снизу вверх* и перебирая столбцы слева направо; например, столбцовая развёртка стандартной таблицы $T = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\ \hline 2&5\\ \cline{1-2}\end{array}$ — это слово 21534

Доказательство. Убедимся вначале, что векторы v_T, построенные по всевозможным стандартным таблицам T, линейно независимы. Выражение вектора $v_T = \sum\limits_{q\in C_T} \operatorname{sgn}(q)\cdot\{qT\}$ через базисные векторы $\{U\}$ пространства M^λ имеет вид $v_T = \{T\} + \sum\limits_{U\prec T} \varepsilon_U\cdot\{U\}$, где $\varepsilon_U = -1, 0, 1$. Любую линейную зависимость между векторами v_T можно переписать в виде[1] $v_T = \sum\limits_{U\prec T} x_U\cdot v_U$. Раскладывая векторы v_T и v_U по базису из таблоидов, мы получаем равенство вида $\{T\} = \sum\limits_{U\prec T} y_U\cdot\{U\}$, что невозможно, так как $\{T\}\neq\{U\}$ ни для какого $U\prec T$.

Таким образом, $\dim S^\lambda \geqslant d_\lambda$. Из теоремы о биекции[2] и теоремы Машке[3] вытекает, что $\sum\limits_\lambda d_\lambda^2 = n! = |S_n| = \sum\limits_\lambda \dim^2 S^\lambda$. Поэтому $\dim S^\lambda = d_\lambda$ и векторы v_T порождают S^λ. □

13.5. Кольцо представлений симметрических групп. Обозначим через $\mathfrak{R}_n$ аддитивную абелеву группу классов представлений симметрической группы S_n. Напомним (см. n° 12.3), что $\mathfrak{R}_n$ можно определить как фактор свободной абелевой группы, порождённой классами $[V]$ изоморфных представлений S_n, по соотношениям $[U\oplus W] = [U] + [W]$ или, что то же самое, — как свободную абелеву группу, порождённую классами $[V_\lambda]$ изоморфных *неприводимых* представлений S_n. Мы собираемся снабдить прямую сумму всех таких групп

$$\mathfrak{R} \overset{\text{def}}{=} \bigoplus_{n\geqslant 1} \mathfrak{R}_n$$

структурой *градуированного*[4] коммутативного кольца с единицей. Подчеркнём, что градуированное умножение на всём $\mathfrak{R}$, которое мы сейчас введём, *отличается* от обсуждавшегося в n° 12.3 умножения $[U],[W]\mapsto[U\otimes W]$, имеющегося на каждом из $\mathfrak{R}_n$ в отдельности.

13.5.1. Умножение в $\mathfrak{R}$. Любые два представления $\varphi : S_k \longrightarrow \mathrm{GL}(U)$ и $\psi : S_m \longrightarrow \mathrm{GL}(W)$ определяют представление

$$\varphi\times\psi : S_k\times S_m \longrightarrow \mathrm{GL}(U\otimes W) \tag{13-13}$$

заданное правилом $(g,h) : u\otimes w \longmapsto gu\otimes hw$. Вложим $S_k\times S_m$ в S_{k+m} в качестве подгруппы, переводящей в себя каждое из двух подмножеств разбиения

$$\{1,\,2,\,\dots,\,k+m\} = \{1,\,2,\,\dots,\,k\}\sqcup\{k+1,\,k+2,\,\dots,\,k+m\} \tag{13-14}$$

образуем представление $\operatorname{Ind}_{S_k\times S_m}^{S_{k+m}} U\otimes W$ группы S_{k+m}, индуцированное с представления (13-13) подгруппы $S_k\times S_m\subset S_{k+m}$, и положим по определению

$$[U]\cdot[V] \overset{\text{def}}{=} \left[\operatorname{Ind}_{S_k\times S_m}^{S_{k+m}} U\otimes W\right]. \tag{13-15}$$

Отметим, что вместо разбиения (13-14) можно было бы использовать любое другое разбиение алфавита $[1..(k+m)]$ на два непересекающихся подмножества. Это дало бы *другую* подгруппу $S_k\times S_m\subset S_{k+m}$, сопряжённую к использованной выше, и представление $\operatorname{Ind}_{S_k\times S_m}^{S_{k+m}} U\otimes W$, индуцированное с представления (13-13) этой сопряжённой подгруппы, будет изоморфно построенному. Таким образом, класс $[U\cdot V]$ не зависит от выбора разбиения (13-14), используемого для его построения.

Из этого замечания сразу следует коммутативность умножения (13-13). Ассоциативность вытекает из того, что для любых трёх представлений U, V и W групп S_k, S_ℓ и S_m, оба класса

[1] для этого достаточно оставить слева только ненулевой член с максимальным индексом T, а все остальные ненулевые члены перенести направо

[2] см. формулу (6-10) на стр. 49

[3] см. см. сл. 9.6 на стр. 76

[4] т. е. такого, что $\mathfrak{R}_k\cdot\mathfrak{R}_m\subset\mathfrak{R}_{k+m}$

$([U] \cdot [V]) \cdot [W]$ и $[U] \cdot ([V] \cdot [W])$ совпадают с классом представления S_{m+n+k}, индуцированного с представления подгруппы $S_k \times S_\ell \times S_m \subset S_{m+n+k}$ в пространстве $U \otimes V \otimes W$ по правилу

$$(g_1, g_2, g_3) : u \otimes v \otimes w \mapsto g_1(u) \otimes g_2(v) \otimes g_3(w) .$$

Упражнение 13.8. Убедитесь в этом.

Дистрибутивность конструкции по отношению к прямым суммам представлений следует из дистрибутивности тензорных произведений.

Лемма 13.6

Кольцо $\mathfrak{R}$ изоморфно кольцу многочленов с целыми коэффициентами от счётного числа переменных, отвечающих классам тривиальных одномерных представлений $[1_k]$ групп S_k (для всех $k \in \mathbb{N}$). Модули таблоидов M^λ являются мономами от этих классов

$$[M^\lambda] = [1_{\lambda_1}] \cdot [1_{\lambda_2}] \cdot \dots \cdot [1_{\lambda_n}] = [1_1]^{\ell_1}[1_2]^{\ell_2} \cdots [1_n]^{\ell_n}$$

(где ℓ_i есть количество строк длины i в диаграмме λ) и образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$.

Доказательство. Из сл. 13.3 вытекает, что классы таблоидных представлений $[M^\lambda]$ выражаются через неприводимые классы $[S^\lambda]$ при помощи верхней треугольной матрицы с целыми коэффициентами и единицами по главной диагонали. Поэтому классы $[M^\lambda]$ образуют базис $\mathfrak{R}$ как модуля над $\mathbb{Z}$. Поскольку представление M^λ, отвечающее диаграмме $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, индуцировано с тривиального одномерного представления подгруппы $S_{\lambda_1} \times S_{\lambda_2} \times \cdots S_{\lambda_n} \subset S_{|\lambda|}$, класс $[M^\lambda]$ является произведением классов тривиальных одномерных представлений $[1_{\lambda_i}] = [M^{(\lambda_i)}]$ групп S_{λ_i}, ибо модуль $M^{(\lambda_i)}$ таблоидов, форма которых — одна строка длины λ_i, представляет собой тривиальное одномерное представление группы S_{λ_i}. □

13.5.2. Скалярное произведение в $\mathfrak{R}$. Обозначим через $([U],[W])$ евклидово скалярное произведение на $\mathfrak{R}$, для которого базис из классов неприводимых представлений $[V_\lambda]$ является ортонормальным. Отметим, что сумма $\mathfrak{R} = \oplus \mathfrak{R}_k$ является ортогональной относительно такого скалярного произведения.

Для любых двух классов представлений $[U] = \sum\limits_{|\lambda|=n} k_\lambda \cdot [V_\lambda]$ и $[W] = \sum\limits_{|\lambda|=n} m_\lambda \cdot [V_\lambda]$, лежащих в одной и той же компоненте $\mathfrak{R}_n$, имеем равенство

$$([U],[W]) = \sum_{|\lambda|=n} k_\lambda m_\lambda = \dim \operatorname{Hom}_{S_n}(U, W) = (\chi_U, \chi_W)_n \,, \tag{13-16}$$

где через $(\chi_U, \chi_W)_n$ мы обозначаем скалярное произведение характеров в групповой алгебре $\mathbb{C}[S_n]$. Для каждой n-клеточной диаграммы μ обозначим, как обычно, через m_i число её строк длины i и положим

$$z_\mu = \prod_i m_i! \cdot i^{m_i} \,, \tag{13-17}$$

Число элементов в классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$, состоящем из всех перестановок циклового типа μ, записывается в этих обозначениях как

$$|C_\mu| = \frac{n!}{z_\mu} .$$

Поскольку подстановки g и g^{-1} имеют одинаковый цикловой тип, $\chi(g) = \chi(g^{-1})$ для любого характера χ и скалярное произведение характеров в правой части (13-16) переписывается как

$$\frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \chi_U\left(g^{-1}\right) \chi_W(g) = \frac{1}{n!} \sum_\mu |C_\mu| \chi_U(C_\mu) \chi_W(C_\mu) = \sum_\mu \frac{\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)}{z_\mu} .$$

Таким образом, для любых классов представлений $[U],[W] \in \mathfrak{R}_n$

$$([U],[W]) = \sum_\mu \frac{\chi_U(C_\mu)\chi_W(C_\mu)}{z_\mu} . \tag{13-18}$$

13.5.3. Связь с симметрическими функциями. Напомним, что в n° 6.6.2 мы ввели на кольце Λ симметрических функций с целыми коэффициентами скалярное произведение $\langle\, *\,,\, *\,\rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным, базис из полных симметрических функций h_λ является двойственным к мономиальному базису m_λ, а полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис векторного пространства $\mathbb{Q}\otimes\Lambda$ со скалярными квадратами $\langle\, p_\lambda\,,\, p_\lambda\,\rangle = z_\lambda$ (определения этих базисов и матрицы переходов между ними см. в §5).

На языке симметрических функций результат предл. 13.2 о характере ψ_λ таблоидного представления M^λ утверждает, что значения $\psi_\lambda(C_\mu)$ являются коэффициентами разложения ньютоновской симметрической функции p_μ по мономиальному базису m_λ:

$$p_\mu = \sum_\lambda \psi_\lambda(C_\mu)\cdot m_\lambda$$

и, тем самым, равны скалярным произведениям с элементами двойственного базиса:

$$\psi_\lambda(C_\mu) = \langle\, p_\mu\,,\, h_\lambda\,\rangle\,,$$

которые можно иначе воспринимать как коэффициенты разложения полных симметрических многочленов h_λ по ортогональному базису p_μ/z_μ:

$$h_\lambda = \sum_\mu z_\mu^{-1}\langle\, p_\mu\,,\, h_\lambda\,\rangle p_\mu = \sum_\mu \frac{\chi_{M^\lambda}(C_\mu)\cdot p_\mu}{z_\mu}\,. \tag{13-19}$$

Сравнение этой формулы с формулой (13-18) приводит к следующему важному результату.

Теорема 13.4

Существует изометрический изоморфизм колец $\mathrm{ch}:\mathfrak{R}\xrightarrow{\sim}\Lambda$, переводящий классы таблоидных представлений $[M^\lambda]$ в полные симметрические многочлены h_λ, классы неприводимых представлений $[S^\lambda]$ — в многочлены Шура s_λ, а инволюцию на классах представлений, заданную тензорным умножением на одномерное знаковое представление, — в инволюцию[1] ω на Λ, переводящую s_λ в s_{λ^t}. Этот изоморфизм корректно задаётся правилом[2]

$$\mathrm{ch}:[U]\longmapsto \mathrm{ch}([U]) \overset{\text{def}}{=} \sum_\mu \frac{\chi_U(C_\mu)\cdot p_\mu}{z_\lambda}\,. \tag{13-20}$$

Доказательство. Отображение (13-20) очевидно линейно по $[U]$:

$$\mathrm{ch}([U]+[W]) = \mathrm{ch}([U\oplus W]) = \sum_\mu \frac{\chi_{U\oplus W}(C_\mu)\cdot p_\mu}{z_\lambda} = \\ = \sum_\mu \frac{(\chi_U(C_\mu)+\chi_W(C_\mu))\cdot p_\mu}{z_\lambda} = \mathrm{ch}([U])+\mathrm{ch}([W])\,.$$

Согласно лем. 13.6 и сл. 5.4 со стр. 37 оба кольца $\mathfrak{R}$ и Λ являются кольцами многочленов от счётного числа переменных: первое — от классов тривиальных одномерных представлений $[1_k]$ групп S_k, второе — от простейших полных симметрических многочленов[3] h_k (в обоих случаях k пробегает $\mathbb{N}$). В силу соотношения (13-19) отображение ch переводит каждый базисный моном

$$[M^\lambda] = [1_{\lambda_1}]\cdot[1_{\lambda_2}]\cdot\,\cdots\,\cdot[1_{\lambda_n}] = [1_1]^{\ell_1}[1_2]^{\ell_2}\cdots[1_n]^{\ell_n}$$

(где ℓ_i есть количество строк длины i в диаграмме λ) в базисный моном

$$h_\lambda = h_{\lambda_1}\cdot h_{\lambda_2}\cdot\,\cdots\,\cdot h_{\lambda_n} = h_1^{\ell_1}h_2^{\ell_2}\cdots h_n^{\ell_n}\,,$$

[1] см. n° 5.4

[2] не смотря на то, что оно содержит знаменатели!

[3] напомню, что $h_k(x)$ представляет собою сумму всех мономов полной степени k (см. n° 5.3)

причём делает это с сохранением мультипликативной структуры, поскольку $\mathrm{ch}([1_k]) = h_k$. Таким образом, ch является изоморфизмом колец $\mathbb{R} \xrightarrow{\sim} \Lambda$. Ортогональность отображения ch вытекает из формулы (13-18) и того, что полиномы Ньютона p_λ образуют в ортогональный базис $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ со скалярными квадратами $\langle p_\lambda, p_\lambda \rangle = z_\lambda$:

$$\langle \mathrm{ch}([U]), \mathrm{ch}([W]) \rangle = \sum_{\lambda,\mu} \frac{\chi_U(C_\lambda)\chi_W(C_\mu)}{z_\lambda z_\mu} \cdot \langle p_\mu, p_\lambda \rangle = \sum_{\mu} \frac{\chi_U(g)\chi_W(g)}{z_\mu} = ([U],[W]) \,.$$

Далее, из сл. 13.3 вытекает, что ортонормальный базис $[S_\lambda]$ выражается через через таблоидный базис $[M^\lambda]$ при помощи некоторой нижней унитреугольной матрицы:

$$[S^\lambda] = [M^\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M^\mu]\,.$$

Согласно формуле (6-20) со стр. 54 полные симметрические многочлены h_λ выражаются через многочлены Шура s_λ также при помощи нижней унитреугольной матрицы

$$h_\lambda = \sum_\mu K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu$$

(так как *числа Костки*[1] $K_{\mu,\lambda}$ отличны от нуля только при $\mu \trianglerighteq \lambda$ и все $K_{\lambda,\lambda} = 1$). Поэтому выражение $\mathrm{ch}\left([S^\lambda]\right)$ через полиномы Шура тоже задаётся некой нижней унитреугольной матрицей:

$$\mathrm{ch}\Big([S^\lambda]\Big) = \mathrm{ch}\big([M^\lambda] + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda}[M^\mu]\big) = h_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} x_{\mu\lambda} h_\mu = s_\lambda + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda} s_\mu \,.$$

Поскольку $1 = \big([S^\lambda],[S^\lambda]\big) = \langle \mathrm{ch}([S^\lambda]), \mathrm{ch}([S^\lambda]) \rangle = \langle s_\lambda, s_\lambda \rangle + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2 \langle s_\mu, s_\mu \rangle = 1 + \sum_{\mu \rhd \lambda} y_{\mu\lambda}^2$, все $y_{\mu\lambda} = 0$, т. е. $\mathrm{ch}\left([S^\lambda]\right) = s_\lambda$. Утверждение о согласованности двух инволюций вытекает из сл. 13.2 и сл. 6.2 со стр. 54. □

Следствие 13.4 (правило Юнга)
Кратность вхождения неприводимого представления S^μ в модуль таблоидов M^λ равна числу Костки $K_{\mu,\lambda}$.

Следствие 13.5 (правило Литлвуда – Ричардсона)
Кратность вхождения неприводимого представления $[S^\nu]$ в представление $[S^\lambda] \cdot [S^\mu]$ равна коэффициенту Литтлвуда – Ричардсона[2] $c^\nu_{\lambda\mu}$ из разложения $s_\lambda \cdot s_\mu = \sum_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu$.

Следствие 13.6 (правило ветвления 1)
Представление $\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}}(S^\lambda)$ группы S_{n+1}, индуцированное неприводимым представлением S^λ подгруппы $S_n \subset S_{n+1}$, является прямой суммой (с единичными кратностями) неприводимых представлений S^μ, диаграмма μ которых получается добавлением одной клетки к диаграмме λ.

Доказательство. Поскольку $[\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(S^\lambda)] = [S^\lambda] \cdot [1_1]$, утверждение вытекает из предыдущего следствия и формулы Пьери[3] для вычисления $s_\lambda \cdot h_1$. □

Следствие 13.7 (правило ветвления 2)
Ограничение $\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(S^\lambda)$ неприводимого представления S^λ группы S_n на подгруппу $S_{n-1} \subset S_n$, является прямой суммой (с единичными кратностями) неприводимых представлений S^μ, диаграмма μ которых получается выкидыванием одной клетки из диаграммы λ.

[1]напомню, что $K_{\mu,\lambda}$ равно числу таблиц формы μ, заполненных λ_1 единицами, λ_2 двойками, и т. д. (см. формулы (6-14)–(6-15) на стр. (6-14))

[2]см. теор. 6.2 на стр. 53

[3]см. упр. 6.6 на стр. (упр. 6.6)

Доказательство. Это получается из предыдущего следствия по двойственности Фробениуса: кратность вхождения неприводимого представления S^μ в $\mathrm{Res}_{S_{n-1}}^{S_n}(S^\lambda)$ равна кратности вхождения неприводимого представления S^λ в $\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n}(S^\mu)$. $\square$

Следствие 13.8 (формула Фробениуса для характеров S_n)
Значение характера χ_λ неприводимого представления S^λ симметрической группы S_n на классе сопряжённости $C_\mu \subset S_n$ равно каждому из следующих трёх равных друг другу чисел:

- коэффициенту при $p_\mu(x)/z_\mu$ в разложении многочлена Шура $s_\lambda(x)$ по базису $p_\mu(x)/z_\mu$ в пространстве $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$
- коэффициенту при $s_\lambda(x)$ в разложении многочлена Ньютона $p_\mu(x)$ по базису Шура $s_\lambda(x)$ в $\mathbb{Z}$-модуле Λ
- коэффициенту при одночлене $x^{\lambda+\delta} = x_1^{\lambda_1+n-1} x_2^{\lambda_2+n-2} \cdots x_n^{\lambda_n}$ в многочлене
$$p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = p_1(x)^{m_1} p_2(x)^{m_2} \cdots p_n(x)^{m_n} \cdot \prod_{i<j}(x_i - x_j)$$

(где $p_k(x) = \sum\limits_i x_i^k$ суть степенные суммы Ньютона, число m_i равно количеству строк длины i в диаграмме λ, а через $\Delta_\delta(x) = \det\left(x_i^{n-j}\right) = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$ обозначен определитель Вандермонда).

Доказательство. Первое вытекает прямо из теор. 13.4. Поскольку система многочленов p_μ ортогональна со скалярными квадратами z_μ, коэффициент при $p_\mu(x)/z_\mu$ в разложении s_λ по базису p_μ равен скалярному произведению $\langle s_\lambda , p_\mu \rangle$, которое в свою очередь равно коэффициенту при s_λ в разложении p_μ по ортонормальному базису s_λ, что даёт второе представление. Записывая s_λ по формуле Якоби – Труди как отношение определителей $s_\lambda(x) = \Delta_{\lambda+\delta}(x)/\Delta_\delta(x)$ и умножая обе части разложения
$$p_\mu(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \frac{\Delta_{\lambda+\delta}(x)}{\Delta_\delta(x)}$$
на определитель Вандермонда Δ_δ, получаем разложение
$$p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x) = \sum_\lambda \chi_\lambda(C_\mu) \cdot \Delta_{\lambda+\delta}(x)\,.$$
Иными словами, $\chi_\lambda(C_\mu)$ равен коэффициенту разложения кососимметрического многочлена
$$p_\mu(x) \cdot \Delta_\delta(x)$$
по стандартному базису из мономиальных кососимметрических функций $\Delta_{\lambda+\delta}(x)$ (см. n° 5.1.2 и n° 5.5). $\square$