§10. Категории и функторы

10.1. Категории. Категория $\mathscr{C}$ — это класс[1] объектов, обозначаемый $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, в котором для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ задано множество морфизмов

$$\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)\,.$$

Морфизмы из X в Y удобно представлять себе в виде стрелок $X \xrightarrow{\varphi} Y$. Для разных пар объектов эти множества стрелок не пересекаются. Для каждой тройки объектов $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ имеется отображение композиции

$$\mathrm{Hom}(Y,Z) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{(\varphi,\psi)\mapsto\varphi\circ\psi} \mathrm{Hom}(X,Z)\,, \tag{10-1}$$

которое ассоциативно в том смысле, что $(\chi\circ\varphi)\circ\psi = \chi\circ(\varphi\circ\psi)$ всякий раз, когда эти композиции определены. Наконец, для каждого объекта $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ имеется *тождественный морфизм*[2]

$$\mathrm{Id}_X \in \mathrm{Hom}(X,X)\,,$$

удовлетворяющей условиям $\varphi\circ\mathrm{Id}_X = \varphi$ и $\mathrm{Id}_X\circ\psi = \psi$ для любых морфизмов $X \xrightarrow{\varphi} Y$, $Y \xrightarrow{\psi} X$ с любым $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Объединение всех стрелок категории обозначается

$$\mathrm{Mor}\mathscr{C} = \bigsqcup_{X,Y} \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)\,.$$

Объекты $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ называются *изоморфными* (обозначение: $X \simeq Y$), если между ними имеются две стрелки $X \underset{\psi}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} Y$, такие что $\varphi\circ\psi = \mathrm{Id}_Y$, $\psi\circ\varphi = \mathrm{Id}_X$ (эти стрелки называются взаимно обратными *изоморфизмами*).

Подкатегория $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ — это категория, все объекты, стрелки и композиции которой наследуются из $\mathscr{C}$. Подкатегория $\mathscr{D} \subset \mathscr{C}$ называется *полной*, если $\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ для любых $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$.

10.1.1. Малые категории. Категория называется *малой*, если её объекты составляют *множество* (а не больший класс). Вот типичные примеры категорий, *не являющихся* малыми:

- категория $\mathscr{S}et$ всех множеств и всех отображений
- категория $\mathscr{T}op$ топологических пространств и непрерывных отображений
- категория $\mathscr{V}ct_{\Bbbk}$ конечномерных векторных пространств над полем $\Bbbk$ и $\Bbbk$-линейных отображений
- категория $\mathscr{A}b$ абелевых групп и их гомоморфизмов

а также алгебры, кольца, группы и т. п. с соответствующими гомоморфизмами в качестве стрелок. Вот два важных примера малых категорий:

- любое частично упорядоченное множество X является малой категорией, объектами которой служат элементы x этого множества, а стрелки отвечают неравенствам:
$$\mathrm{Hom}_X(x,y) = \begin{cases} \text{одноэлементное множество, когда } x \leqslant y, \\ \text{пустое множество, когда } x \text{ и } y \text{ несравнимы.} \end{cases}$$
- (важный частный случай предыдущей ситуации) со всяким топологическим пространством X связана категория $\mathscr{U}(X)$ всех открытых подмножеств X, морфизмами в которой являются вложения $U \hookrightarrow V$, если $U \subseteq V$, а если $U \nsubseteq V$, то $\mathrm{Hom}(U,V) = \varnothing$.

[1] нам бы не хотелось вдаваться в точную формализацию этого термина (столь же содержательную, как формализации арифметики и теории множеств, разбираемые в стандартном курсе математической логики); отметим лишь, что такая формализация возможна и позволяет говорить, например, о «категории множеств», объекты которой, по понятным причинам, множества не образуют

[2] обычная выкладка $\mathrm{Id}' = \mathrm{Id}'\circ\mathrm{Id}'' = \mathrm{Id}''$ показывает, что тождественный морфизм единственен

10.1.2. Малые категории и ассоциативные алгебры. Всякую ассоциативную алгебру A с единицей $e \in A$ можно рассматривать как малую категорию с одним объектом e и множеством стрелок $\mathrm{Hom}(e,e) = A$, композиция на котором задаётся умножением в этой алгебре. Наоборот, со всякой малой категорией $\mathscr{C}$ можно связать *алгебру стрелок* $\Bbbk[\mathscr{C}]$, состоящую из формальных конечных линейных комбинаций стрелок категории $\mathscr{C}$ с коэффициентами в каком–нибудь поле (или коммутативном кольце[1]) $\Bbbk$:

$$\Bbbk[\mathscr{C}] = \bigoplus_{X,Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \mathrm{Hom}(X,Y) \otimes \Bbbk = \left\{ \sum x_i \varphi_i \;\middle|\; \varphi_i \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})\,,\ x_i \in \Bbbk \right\}.$$

Умножение в этой алгебре индуцируется композицией стрелок:

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi\circ\psi & \text{если конец } \psi \text{ совпадает с началом } \varphi \\ 0 & \text{, во всех прочих случаях} \end{cases}$$

и по дистрибутивности распространяется на их линейные комбинации.

Алгебру $\Bbbk[\mathscr{C}]$ можно представлять себе как алгебру квадратных матриц[2], строки и столбцы которых занумерованы объектами категории, и в каждой клетке (Y,X) стоят элементы из своего пространства $\mathrm{Hom}(X,Y) \otimes \Bbbk$.

Эта алгебра, вообще говоря, некоммутативна и без единицы, однако, для всякого $f \in \Bbbk[\mathscr{C}]$ существует идемпотент[3] $e_f = e_f^2$, такой что $e_f \circ f = f \circ e_f = f$. В качестве такового элемента можно взять сумму стрелок Id_X по всем объектам X, являющимся началами и концами стрелок, линейной комбинацией которых является f.

10.1.3. Конечные упорядоченные множества и комбинаторные симплексы. Обозначим через Δ_{big} категорию, объектами которой являются конечные упорядоченные множества X, а морфизмами — неубывающие[4] отображения $X \xrightarrow{\varphi} Y$. Эта категория содержит полную малую подкатегорию $\Delta \subset \Delta_{\mathrm{big}}$, объектами которой являются конечные подмножества в $\mathbb{Z}$ вида

$$\underline{n} \overset{\mathrm{def}}{=} \{0,\,1,\,\dots\,,\,n\}\,, \quad n \geqslant 0\,,$$

со стандартным порядком. Категория Δ называется категорией *комбинаторных симплексов* (или *симплициальной категорией*).

Упражнение 10.1. Сколько всего стрелок в множестве $\mathrm{Hom}_\Delta(\underline{n},\underline{m})$? Сколько среди них инъективных? Сколько сюрьективных?

Упражнение 10.2. Покажите, что алгебра стрелок[5] $\Bbbk[\Delta]$, как абстрактная ассоциативная алгебра, порождается стрелками

$$e_n = \mathrm{Id}_{\underline{n}} \qquad \text{(тождественное отображение)} \tag{10-2}$$

$$\partial_n^{(i)} : \underline{(n-1)} \hookrightarrow \underline{n} \qquad \text{(вложение, образ которого не содержит } i\text{)} \tag{10-3}$$

$$s_n^{(i)} : \underline{n} \twoheadrightarrow \underline{(n-1)} \qquad \text{(наложение, склеивающее } i \text{ с } (i+1)\text{)} \tag{10-4}$$

и попробуйте описать образующие идеала соотношений между этими стрелками.

Отметим, что категория Δ_{big} не является малой[6], однако для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{big}}$ имеется *единственный* изоморфизм

$$n_X : X \xrightarrow{\sim} \underline{n} \tag{10-5}$$

с *единственным* $\underline{n} \in \mathrm{Ob}\,\Delta$ (нумерация элементов X в порядке возрастания).

[1] через $M \otimes \Bbbk$, где M — множество, а $\Bbbk$ — коммутативное кольцо, мы обозначаем свободный $\Bbbk$-модуль, базисом которого являются элементы множества M, т. е. множество всех *конечных* формальных линейных комбинаций элементов множества M с коэффициентами из $\Bbbk$

[2] вообще говоря, бесконечного размера, но имеющих лишь конечное число ненулевых элементов

[3] т. е. элемент, квадрат которого совпадает с ним самим

[4] т. е. сохраняющие порядок: $x_1 \leqslant x_2 \iff \varphi(x_1) \leqslant \varphi(x_2)$

[5] скажем, с коэффициентами в $\mathbb{Q}$

[6] по упомянутым выше формальным логическим причинам, см. сноску на стр. 83

10.1.4. Обращение стрелок. С каждой категорией $\mathscr{C}$ связана *противоположная* категория $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$ с теми же объектами, но с обращённым направлением всех стрелок:

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} = \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}\ , \quad \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,X)\ , \quad \varphi^{\mathrm{opp}}\circ\psi^{\mathrm{opp}} = (\psi\circ\varphi)^{\mathrm{opp}}\ .$$

На языке алгебр такое обращение стрелок означает переход от алгебры $C = \Bbbk[\mathscr{C}]$ к противоположной алгебре C^{opp}, умножение в которой происходит в противоположном порядке:

$$f \underset{C^{\mathrm{opp}}}{\circ} g = f \underset{C}{\circ} g\,.$$

10.2. Функторы.

10.2. Функторы. Функтор $F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ из категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ — это отображение

$$\mathrm{Ob}\,\mathscr{C} \xrightarrow{X\mapsto F(X)} \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}\ ,$$

и набор отображений[1]

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y) \xrightarrow{\varphi\mapsto F_\varphi} \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),F(Y))\ , \tag{10-6}$$

таких что $F_{\mathrm{Id}_X} = \mathrm{Id}_{F(X)}\quad \forall X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и $F_{\varphi\circ\psi} = F_\varphi\circ F_\psi$ всякий раз, когда композиция $\varphi\circ\psi$ определена. На языке ассоциативных алгебр функторы являются *гомоморфизмами* из одной алгебры стрелок в другую. Часто вместо слова «функтор» говорят *ковариантный функтор*.

Если все отображения (10-6) сюрьективны, то функтор F называется *полным*[2]. Образ такого функтора является полной подкатегорией. Если все отображения (10-6) инъективны, то функтор F называется *строгим*[3]. Такой функтор задаёт вложение алгебр стрелок. Полные строгие функторы иногда называют *вполне строгими*.

Тривиальными примерами функторов являются *тождественный функтор* $\mathrm{Id}_{\mathscr{C}} : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}$, тривиально действующий на объектах и морфизмах любой категории $\mathscr{C}$, а также *забывающие функторы*, действующие из какой-либо категории множеств с *дополнительной структурой*[4] (морфизмы в которой суть отображения множеств, сохраняющие рассматриваемую структуру) в категорию $\mathscr{S}et$ всех множеств — такие функторы просто забывают о структуре и являются строгими и (как правило) не полными.

10.2.1. Пример: геометрическая реализация симплексов. Зададим функтор

$$\Delta \xrightarrow{\underline{n}\mapsto\Delta^n} \mathscr{T}op$$

из категории комбинаторных симплексов в категорию топологических пространств, сопоставляя объекту $\underline{n}$ стандартный n-мерный симплекс

$$\Delta^n = \left\{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum x_\nu = 1\,,\ x_\nu \geqslant 0 \right\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$$

(выпуклую оболочку концов базисных векторов $e_0, e_1, \dots, e_n$), а стрелке $\underline{n} \xrightarrow{\varphi} \underline{m}$ — единственное аффинное отображение из одного такого симплекса в другой, действующее на базисные векторы по правилу $e_\nu \mapsto e_{\varphi(\nu)}$. Это строгий, но не полный функтор. Образующие элементы (10-3) и (10-4) алгебры стрелок категории Δ переводятся этим функтором, соответственно, в отображение вложения i-той грани $\Delta^{(n-1)} \hookrightarrow \Delta^n$ и в отображение вырождения $\Delta^n \twoheadrightarrow \Delta^{(n-1)}$, задаваемого аффинной проекцией вдоль ребра, соединяющего i-тую вершину с $(i+1)$-й.

10.3. Предпучки.

10.3. Предпучки. Функтор $F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{D}$ называется *контравариантным функтором* из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{D}$ или *предпучком* объектов категории $\mathscr{D}$ на категории $\mathscr{C}$. Такой функтор оборачивает композицию: $F_{\varphi\circ\psi} = F_\psi\circ F_\varphi$ и на языке ассоциативных алгебр является *антигомоморфизмом* алгебр стрелок.

[1] по одному отображению для каждой упорядоченной пары объектов $X, Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$

[2] по-английски: *full*

[3] по-английски: *faithful*

[4] например, геометрической — такой как топология или структура гладкого многообразия — или алгебраической — такой как структура группы, кольца или модуля

10.3.1. Пример: триангулированные пространства. Обозначим через $\Delta_{\mathrm{s}} \subset \Delta$ неполную подкатегорию с тем же множеством объектов $\mathrm{Ob}\,\Delta_{\mathrm{s}} = \mathrm{Ob}\,\Delta$, но только со *строго возрастающими* отображениями в качестве морфизмов. Категория Δ_{s} называется *полусимплициальной категорией*.

Упражнение 10.3. Убедитесь, что алгебра стрелок $\Bbbk[\Delta_{\mathrm{s}}]$ порождается тождественными стрелками $e_n = \mathrm{Id}_{\underline{n}}$ и отображениями вложения граней $\partial_n^{(i)}$.

Предпучок множеств $X : \Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$ на полусимплициальной категории есть не что иное, как комбинаторное описание для *триангулированного топологического пространства*. В самом деле, функтор X задаёт для каждого целого неотрицательного n множество

$$X_n = X(\underline{n})\,,$$

точки которого следует воспринимать как дизъюнктный набор n-мерных симплексов, из коих будет склеено триангулированное пространство. Каждая стрелка $\underline{n} \xrightarrow{\varphi} \underline{m}$ в категории Δ_{s} представляет собой «название» для конкретной n-мерной грани в абстрактном комбинаторном ориентированном m-мерном симплексе $\underline{m}$. Функтор X сопоставляет этому «названию» отображение

$$X_\varphi : X_m \longrightarrow X_n\,,$$

которое следует интерпретировать как *правило склейки*: каждый m-мерный симплекс $x \in X_m$ переводится отображением X_φ в тот n-мерный симплекс $x' \in X_n$, который приклеивается к x в качестве φ-той n-мерной грани.

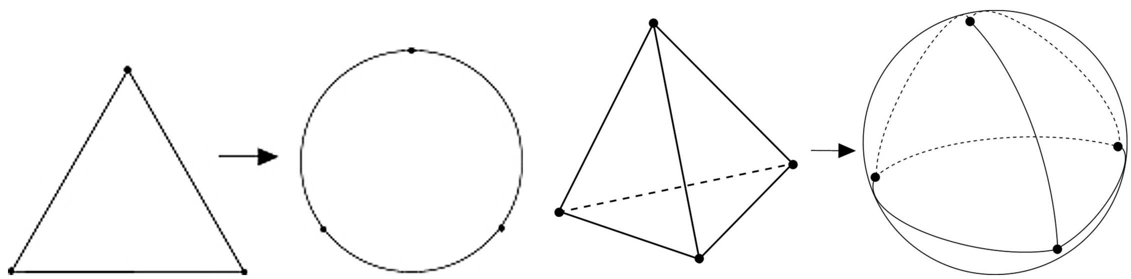

Рис. 10◇1. Стандартные триангуляции окружности и сферы

Упражнение 10.4. Опишите предпучки $\Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{F} \mathscr{S}et$, отвечающие стандартным триангуляциям окружности, сферы и тора, представленным на рис. 10◇1, рис. 10◇2.

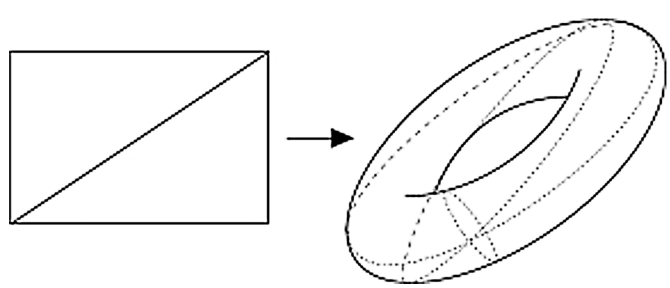

Рис. 10◇2. Стандартная триангуляция тора.

Предпучок множеств на полусимплициальной категории Δ_{s} называется *полусимплициальным множеством*, а триангулированное топологическое пространство, получающееся склейкой правильных аффинных симплексов по описанным выше правилам, называется *геометрической реализацией* полусимплициального множества.

10.3.2. Симплициальные множества. Предпучок множеств $X : \Delta^{\text{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$ на всей симплициальной категории называется *симплициальным множеством*. Комбинаторный набор данных, который в нём закодирован, имеет два существенных отличия от набора данных, задающего триангулированное пространство: во-первых, допускаются «вырожденные триангуляции» (вроде показанных на рис. 10◇3, рис. 10◇4), а во-вторых, для каждого k-мерного симплекса $x \in X_k$ и каждого отображения $\psi : \underline{m} \twoheadrightarrow \underline{k}$ с $m > k$ должен быть указан m-мерный симплекс $x'' = X_\psi(x) \in X_m$, который приклеивается к пространству в виде k-мерного симплекса x, будучи предварительно вырожден в соответствии с отображением ψ. Например, элементарному вырождению (10-4), проектирующему симплекс на $(i+1)$-ю гипергрань вдоль ребра $[i,(i+1)]$, отвечает отображение

$$X_{s_n^{(i)}} : X_{n-1} \longrightarrow X_n\,,$$

которое указывает каждому $(n-1)$-симплексу $x \in X_{n-1}$, какой именно n-симплекс $x'' = X_{s_n^{(i)}} \in X_n$ следует приклеить к пространству X в виде $(n-1)$-симплекса x, предварительно выродив его при помощи проекции вдоль ребра $[i,(i+1)]$.

Таким образом, симплициальное множество помимо собственно триангулированного пространства (в котором составляющим триангуляцию симплексам разрешается вырождаться в симплексы меньшей размерности) содержит в себе и некоторое его «симплициальное разрешение». Точный смысл этой фразы мы объясним далее, в n° 11.2.1.

Упражнение 10.5*. Попробуйте[1] точно описать предпучки $X : \Delta^{\text{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$, отвечающие «вырожденным триангуляциям» окружности и сферы, представленным на рис. 10◇3, рис. 10◇4, например найти количество симплексов в каждом множестве X_n (а они непусты *при всех* $n \gg 0$).

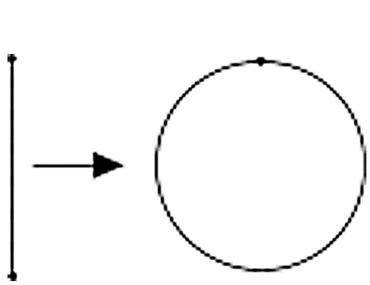

Рис. 10◇3.

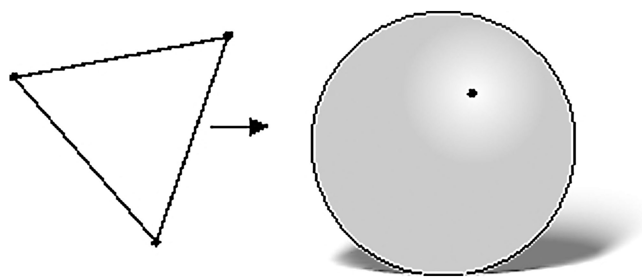

Рис. 10◇4.

10.3.3. Предпучок сечений. Термин «предпучок» впервые прозвучал применительно к категории $\mathscr{C} = \mathscr{U}(X)$ всех открытых подмножеств $U \subset X$ заданного топологического пространства X. В этом контексте предпучок $F : \mathscr{U}(X)^{\text{opp}} \longrightarrow \mathscr{D}$ сопоставляет каждому открытому множеству $U \subset X$ объект $F(U) \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$, который называется «*сечениями*» предпучка F над U. В зависимости от категории $\mathscr{D}$ сечения могут образовывать множество, кольцо, алгебру, векторное или топологическое пространство и т. п. Морфизм $F(W) \longrightarrow F(U)$, отвечающий включению $U \subset W$, называется *ограничением сечений*, определённых над W, на подмножество $U \subset W$, а результат его применения к сечению $s \in F(W)$ обозначается через $s|_U$. Вот несколько типичных примеров таких предпучков:

- предпучок Γ_E локальных сечений непрерывного отображения $p : E \longrightarrow X$, имеет в качестве $\Gamma_E(U)$ множество непрерывных отображений $s : U \longrightarrow E$, таких что[2] $p \circ s = \mathrm{Id}_U$, а его отображения ограничения — это обычные ограничения сечений с большего подмножества на меньшее;
- предпучок непрерывных отображений $\mathscr{C}^0(X,Y)$ пространства X в пространство Y имеет в качестве сечений над $U \subset X$ непрерывные отображения $s : U \longrightarrow Y$ (это частный случай предыдущего примера, возникающий из проекции $X \times Y \xrightarrow{p} X$);

[1] мы ещё вернёмся к этой задаче в n° 11.2.1

[2] это требование означает, что каждая точка $x \in U$ отображается в слой $p^{-1}(x)$ над нею

- дальнейшими специализациями первого примера являются так называемые *структурные предпучки* $\mathscr{O}_X$: предпучок дифференцируемых функций на гладком вещественном многообразии, предпучок голоморфных функций на комплексно аналитическом многообразии, предпучок локально определённых рациональных функций на алгебраическом многообразии и т. п. (все эти предпучки являются предпучками колец и даже алгебр над соответствующим полем);
- постоянный предпучок S имеет в качестве $S(U)$ одно и то же фиксированное множество S для всех $U \subset X$, и все его отображения ограничения — тождественные морфизмы Id_S.

10.4. Функторы Hom. С каждым объектом $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ произвольной категории $\mathscr{C}$ связаны

- (ковариантный) функтор $h^X : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et$, который переводит объект Y в множество морфизмов
$$h^X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(X,Y)\,,$$
а стрелку $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ в отображение левого умножения на φ:
$$h^X_\varphi : \mathrm{Hom}(X,Y_1) \xrightarrow{\psi\mapsto\varphi\circ\psi} \mathrm{Hom}(X,Y_2)\,,$$
- предпучок $h_X : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et$, который переводит объект Y в
$$h_X(Y) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{Hom}(Y,X)\,,$$
а стрелку $Y_1 \xrightarrow{\psi} Y_2$ в отображение правого умножения на ψ:
$$h_X^\varphi : \mathrm{Hom}(Y_2,X) \xrightarrow{\varphi\mapsto\varphi\psi} \mathrm{Hom}(Y_1,X)\,.$$

Например, предпучок $h_{\underline{n}} : \Delta_s \longrightarrow \mathscr{S}et$ на полусимплициальной категории Δ_s задаёт триангулированное пространство, представляющее собою стандартную триангуляцию стандартного n-мерного симплекса: множество k-мерных симплексов $h_{\underline{n}}(\underline{k}) = \mathrm{Hom}(\underline{k},\underline{m})$ этого пространства есть в точности множество всех k-мерных граней.

Предпучок $h_U : \mathscr{U}(X) \longrightarrow \mathscr{S}et$ на топологическом пространстве X имеет ровно одно сечение над всеми $W \subset U$ и пустое множество сечений над любым $W \not\subset U$. Вот ещё несколько примеров.

10.4.1. Пример: двойственность векторных пространств. Функтор дуализации
$$h_{\Bbbk} : \mathscr{V}\!ect_{\Bbbk}^{\text{opp}} \xrightarrow{V\mapsto V^*} \mathscr{V}\!ect_{\Bbbk}$$
переводит векторное пространство V в двойственное векторное пространство
$$h_{\Bbbk}(V) = \mathrm{Hom}(V,\Bbbk) = V^*\,,$$
а каждое линейное отображение $V \xrightarrow{\varphi} W$ в двойственное отображение $W^* \xrightarrow{\varphi^*} V^*$, переводящее линейную форму $\xi : W \longrightarrow \Bbbk$ в линейную форму $\xi\circ\varphi : V \longrightarrow \Bbbk$.

10.4.2. Пример: двойственность конечных упорядоченных множеств. Это комбинаторная версия предыдущего примера. Обозначим через через ∇_{big} категорию конечных упорядоченных множеств, содержащих $\geqslant 2$ элементов, морфизмами в которой являются неубывающие отображения, переводящие минимальный элемент в минимальный, а максимальный — в максимальный[1] (так что тавтологическое включение $\nabla_{\text{big}} \hookrightarrow \Delta_{\text{big}}$ является строгим, но не полным функтором). Контравариантные *функторы дуализации*
$$h_{\underline{1}} : \Delta_{\text{big}}^{\text{opp}} \xrightarrow{X\mapsto X^*} \nabla_{\text{big}} \quad \text{и} \quad h_{\underline{1}} : \nabla_{\text{big}}^{\text{opp}} \xrightarrow{Y\mapsto Y^*} \Delta_{\text{big}}$$

[1] отметим, что минимальный и максимальный элементы различны

переводят конечные упорядоченные множества $X \in \operatorname{Ob}\Delta_{\text{big}}$ и $Y \in \operatorname{Ob}\nabla_{\text{big}}$ в

$$X^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\Delta_{\text{big}}}(X, \underline{1}) \quad \text{и} \quad Y^* \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Hom}_{\nabla_{\text{big}}}(Y, \underline{1}),$$

где порядок на множествах $\operatorname{Hom}(\,*\,, \underline{1})$ задаётся поточечным сравнением значений:

$$\varphi \leqslant \psi \quad \iff \quad \varphi(x) \leqslant \psi(x) \quad \forall\, x.$$

Стрелка $Z_1 \xrightarrow{\varphi} Z_2$ переводится функторами дуализации в морфизм правого умножения на φ

$$\operatorname{Hom}(Z_2, \underline{1}) \xrightarrow{\xi \mapsto \xi\circ\varphi} \operatorname{Hom}(Z_1, \underline{1}).$$

Иначе можно сказать, что оба дуализирующих предпучка $h_{\underline{1}}$ сопоставляют конечному упорядоченному множеству Z множество его «дедекиндовых сечений»: для $X \in \operatorname{Ob}\Delta_{\text{big}}$ множество X^* есть множество *всех* разбиений[1] $X = X_0 \sqcup X_1$ с $x_0 < x_1$ для всех $x_0 \in X_0$, $x_1 \in X_1$, а для $Y \in \operatorname{Ob}\nabla_{\text{big}}$ множество Y^* есть множество всех *собственных* разбиений[2] $Y = Y_0 \sqcup Y_1$. Обратите внимание, что сечения ведут себя *контра*вариантно по отношению к морфизмам: при наличии (нестрого) монотонного отображения $Z_1 \longrightarrow Z_2$ разбиение второго множества Z_2 индуцирует разбиение на Z_1, но не наоборот.

10.5. Категория функторов. Для произвольной пары функторов

$$F : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D} \quad \text{и} \quad G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$$

естественным преобразованием $F \xrightarrow{f} G$ функтора F в функтор G называется семейство стрелок $F(X) \xrightarrow{f_X} G(X)$ в категории $\mathscr{D}$ (по одной стрелке для каждого $X \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$), такое что для любой стрелки $X \xrightarrow{\varphi} Y$ в $\mathscr{C}$ следующая диаграмма морфизмов в $\mathscr{D}$ коммутативна:

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "F_\varphi"] \arrow[d, "f_X"'] & F(Y) \arrow[d, "f_Y"] \\ G(Y) \arrow[r, "G_\varphi"] & G(Y) \end{tikzcd} \tag{10-7}$$

На языке алгебр, всякий гомоморфизм $F : \Bbbk[\mathscr{C}] \longrightarrow \Bbbk[\mathscr{D}]$ наделяет алгебру $\Bbbk[\mathscr{D}]$ структурой модуля над алгеброй $\Bbbk[\mathscr{C}]$, в которой умножение элемента $b \in \Bbbk[\mathscr{D}]$ на элемент $a \in \Bbbk[\mathscr{C}]$ определяется правилом $a \cdot b \stackrel{\text{def}}{=} F(a) \cdot b$. Пара функторов $F, G : \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ задаёт на алгебре $\Bbbk[\mathscr{D}]$ две различных структуры модуля над алгеброй $\Bbbk[\mathscr{C}]$, и естественное преобразование $f : F \longrightarrow G$ есть ни что иное, как гомоморфизм $\Bbbk[\mathscr{C}]$-модулей $\Bbbk[\mathscr{D}] \longrightarrow \Bbbk[\mathscr{D}]$, отвечающих этим двум структурам.

Таким образом, функторы $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{D}$ образуют *категорию функторов* $\mathscr{F}\!un(\mathscr{C}, \mathscr{D})$, морфизмами в которой являются естественные преобразования функторов.

Упражнение 10.6. Проверьте, что описанное в n° 10.4 сопоставление $X \mapsto h_X$ является функтором из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{F}\!un(\mathscr{C}^{\text{opp}}, \mathscr{S}\!et)$, а сопоставление $X \mapsto h^X$ — функтором из $\mathscr{C}^{\text{opp}}$ в $\mathscr{F}\!un(\mathscr{C}, \mathscr{S}\!et)$.

Категорию предпучков $\mathscr{F}\!un(\mathscr{C}^{\text{opp}}, \mathscr{D})$ мы будем обозначать $\mathscr{P}\!re\mathscr{S}\!h(\mathscr{C}, \mathscr{D})$. Опущенная буква $\mathscr{D}$ в этой записи по умолчанию означает, что $\mathscr{D} = \mathscr{S}\!et$, т. е. $\mathscr{P}\!re\mathscr{S}\!h(\mathscr{C}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathscr{F}\!un(\mathscr{C}^{\text{opp}}, \mathscr{S}\!et)$.

10.6. Эквивалентные категории. Пусть между категориями $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ имеются Функторы

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D},$$

[1] включая несобственные разбиения, в которых одно из подмножеств X_i пустое

[2] т. е. таких, что оба $Y_i \neq \varnothing$

такие что композиция GF изоморфна в категории $\mathcal{F}un(\mathcal{C},\mathcal{C})$ тождественному функтору $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а композиция FG изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ в категории $\mathcal{F}un(\mathcal{D},\mathcal{D})$. В таком случае категории $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ называются *эквивалентными*, а функторы F и G называются *квазиобратными* друг другу *эквивалентностями категорий*. Подчеркнём, что изоморфизм в категории функторов вовсе не предполагает *равенств* $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$ или $GF = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$, а означает лишь, что между между различными, вообще говоря, объектами $GF(X) \neq X$ имеется естественный по X изоморфизм $GF(X) \xrightarrow{\sim} X$, и аналогично для композиции FG.

10.6.1. Пример: выбор базиса. Обозначим через $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}ect_{\Bbbk}$ малую полную подкатегорию со счётным множеством объектов, состоящую из *координатных* пространств $\Bbbk^n$ (где $n \geqslant 0$ и $\Bbbk^0 = \{0\}$). Зафиксируем в каждом конечномерном пространстве $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}ect_{\Bbbk}$ какой-нибудь базис. Это равносильно фиксации для каждого $V \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{V}ect_{\Bbbk}$ некоторого изоморфизма

$$f_V : V \xrightarrow{\sim} \Bbbk^{\dim(V)} \tag{10-8}$$

(выбранный в V базис есть прообраз стандартного базиса $\Bbbk^n$ при этом изоморфизме). Будем считать, что во всех координатных пространствах $\Bbbk^n$ выбран стандартный базис, т. е. $f_{\Bbbk^n} = \mathrm{Id}_{\Bbbk^n}$ $\forall\, n$. Зададим функтор $\mathcal{V}ect \xrightarrow{F} \mathcal{C}$ правилами $F(V) = \Bbbk^{\dim V}$ и

$$F\Big(V \xrightarrow{\varphi} W\Big) = \Bbbk^{\dim V} \xrightarrow{f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}} \Bbbk^{\dim W} \tag{10-9}$$

(на языке базисов последнее равенство означает сопоставление линейному оператору φ его матрицы в выбранных базисах пространств V и W). Легко видеть, что F является эквивалентностью категорий, квазиобратной ко вполне строгому вложению $\mathcal{C} \overset{G}{\hookrightarrow} \mathcal{V}ect$.

Действительно, по построению $FG = \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ (причём это *точное равенство*, а не изоморфизм функторов), а противоположная композиция $\mathcal{V}ect \xrightarrow{GF} \mathcal{V}ect$ хоть и принимает значения в малой подкатегории $\mathcal{C} \subset \mathcal{V}ect$ (бесконечно далёкой от $\mathcal{V}ect$ по мощности), но изоморфна $\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ect}$ в категории $\mathcal{F}un(\mathcal{V}ect,\mathcal{V}ect)$, и изоморфизм этот задаётся преобразованием (10-8), которое является *естественным* в следствие нашего определения действия функтора F на стрелки: формула (10-9) есть ни что иное, как требование коммутативности всех диаграмм (10-7):

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Id}_{\mathcal{V}ect}(V) = & V & \xrightarrow{\varphi = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}ect}(\varphi)} & W & = \mathrm{Id}_{\mathcal{V}ect}(W) \\
& f_V \big\downarrow \wr & & \wr \big\downarrow f_W & \\
GF(V) = & \Bbbk^{\dim V} & \xrightarrow{GF(\varphi) = f_W \circ \varphi \circ f_V^{-1}} & \Bbbk^{\dim W} & = GF(W)
\end{array}$$

Упражнение 10.7. При помощи канонических изоморфизмов (10-5) покажите, что категория Δ_{big} *канонически* эквивалентна своей малой полной подкатегории $\Delta \subset \Delta_{\text{big}}$.

Лемма 10.1
Функтор $G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ тогда и только тогда задаёт эквивалентность категорий, когда он вполне строг[1] и каждый объект $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ изоморфен объекту вида $G(X)$, где $X = X(Y) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ зависит, вообще говоря, от Y.

Доказательство. Зафиксируем для каждого $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{D}$ какой-нибудь изоморфизм

$$f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X)$$

где $X = X(Y) \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ существующий по условию объект. На объектах $Y = F(X)$ положим $f_{F(X)} = \mathrm{Id}_{F(X)}$. Зададим функтор $F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ на объектах правилом $F(Y) = X(Y)$, а на

[1] т. е. все отображения $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \xrightarrow{\varphi \mapsto G(\varphi)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(G(X),G(Y))$ являются изоморфизмами

стрелках — правилом

$$Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2 \quad \longmapsto \quad X_1 \xrightarrow{\psi} X_2 \tag{10-10}$$

$$\text{где} \quad X_i = X(Y_i) \quad \text{и} \quad f_{Y_2} \circ \varphi \circ f_{Y_1}^{-1} = G(\psi) \tag{10-11}$$

(поскольку $G : \mathrm{Hom}(X_1, X_2) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(G(X_1), G(X_2))$ является изоморфизмом, такая стрелка ψ существует и единственна). По построению, $FG = \mathrm{Id}_{\mathscr{C}}$ и для любой стрелки $Y_1 \xrightarrow{\varphi} Y_2$ в $\mathscr{C}$ имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(Y_1) = Y_1 \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f_{Y_1}"', "\sim"] & Y_2 = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(Y_2) \arrow[d, "\sim"', "f_{Y_2}"] \\ GF(Y_1) = X_1 \arrow[r, "GF_\varphi = G_\psi"] & X_2 = GF(Y_2) \end{tikzcd}$$

Таким образом, изоморфизмы $f_Y : Y \xrightarrow{\sim} G(X) = GF(Y)$ задают естественный изоморфизм между тождественным функтором $\mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ и композицией GF. □

Упражнение 10.8. Покажите, что функторы дуализации из n° 10.4.1 и n° 10.4.2 являются эквивалентностями категорий (квазиобратными самим себе).

10.7. Представимые функторы. Всякий предпучок $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$, изоморфный функтору h_X в категории $\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$, называется *представимым*. Двойственным образом, всякий ковариантный функтор $\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{S}et$ изоморфный в категории $\mathscr{F}un(\mathscr{C}, \mathscr{S}et)$ функтору h^X называется *копредставимым*. Объект X называется при этом (*ко*)*представляющим* объектом такого (ко)представимого функтора.

Если $X : \Delta_{\mathrm{s}} \longrightarrow \mathscr{S}et$ — триангулированное топологическое пространство, то множество $X_n = X(\underline{n})$ его n-мерных симплексов можно описать как множество симплициальных[1] отображений из стандартным образом триангулированного n-мерного симплекса $h_{\underline{n}}$ в X, т. е. как $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\Delta_{\mathrm{s}}^{\mathrm{opp}}, \mathscr{S}et)}(h_{\underline{n}}, X)$. Обобщением этого наблюдения является

Лемма 10.2 (лемма Ионеды)
Для любого предпучка множеств $F : \mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$ на произвольной категории $\mathscr{C}$ имеется функториальная по $F \in \mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})$ и по $A \in \mathscr{C}$ биекция

$$F(A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(h_A, F) ,$$

которая переводит элемент $a \in F(A)$ в естественное преобразование

$$\left\{ \mathrm{Hom}(X, A) \xrightarrow{f_X} F(X) \right\}_{X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} , \tag{10-12}$$

посылающее стрелку $X \xrightarrow{\varphi} A$ в значение $F_\varphi(a)$ отображения $F_\varphi : F(A) \longrightarrow F(X)$ на элементе a. Обратная биекция сопоставляет каждому естественному преобразованию (10-12) значение

$$a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$$

отображения $h_A(A) \xrightarrow{f_A} F(A)$ на элементе $\mathrm{Id}_A \in h_A(A) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, A)$.

Доказательство. Для любого естественного преобразования (10-12), любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и любой стрелки $X \xrightarrow{\varphi} A$ мы имеем коммутативную диаграмму (10-7):

$$\begin{tikzcd} h_A(A) = \mathrm{Hom}(A, A) \arrow[r, "h_A^\varphi"] \arrow[d, "f_A"'] & \mathrm{Hom}(X, A) = h_A(X) \arrow[d, "f_X"] \\ F(A) \arrow[r, "F_\varphi"] & F(X) \end{tikzcd} \tag{10-13}$$

[1] т. е. согласованных с триангуляциями

верхняя строка которой переводит Id_A в φ, так что $f_X(\varphi) = F_\varphi\big(f_A(\mathrm{Id}_A)\big)$. Это означает, что всякое естественное преобразование $h_A \xrightarrow{f} F$ *однозначно* восстанавливается по элементу $a = f_A(\mathrm{Id}_A) \in F(A)$, и наоборот, для произвольного элемента $a \in F(A)$, мы тавтологически задаём естественное преобразование f требованием коммутативности всех диаграмм (10-13), когда X пробегает $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Функториальность диаграммы (10-13) по A и F очевидна. $\square$

Упражнение 10.9. Сформулируйте и докажите двойственную версию леммы Ионеды, обслуживающую предпучок $A \mapsto h^A$ копредставимых функторов на $\mathscr{C}$ и ковариантные функторы $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{S}et$.

Следствие 10.1
Функторы $\mathscr{C} \xrightarrow{X \mapsto h_X} \mathscr{F}un(\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}, \mathscr{S}et)$ и $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \xrightarrow{X \mapsto h^X} \mathscr{F}un(\mathscr{C}, \mathscr{S}et)$ из упр. 10.6 суть вполне строгие ковариантное и, соответственно, контравариантное вложения категории $\mathscr{C}$ в категории предпучков и ковариантных функторов. Иными словами, имеются функториальные по $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ изоморфизмы $\mathrm{Hom}_{\mathscr{P}re\mathscr{S}h(\mathscr{C})}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(A, B)$ и $\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}un(\mathscr{C},\mathscr{S}et)}(h_A, h_B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(B, A)$.

Доказательство. Применяем леммы Ионеды к функторам $F = h_B$ и $F = h^B$. $\square$

10.8. Описание объектов «универсальными» свойствами. Неформально говоря, предыдущее следствие означает, что если функтор F представим, то представляющий этот функтор объект единственен с точностью до канонического изоморфизма. Это позволяет переносить теоретико множественные конструкции из категории $\mathscr{S}et$ в произвольные категории: результатом интересующей нас теоретико множественной операции над набором объектов $X_i \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ объявляется объект $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, который представляет функтор $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}} \longrightarrow \mathscr{S}et$, переводящий всякий $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ в множество, получающееся в результате применения рассматриваемой операции к множествам $\mathrm{Hom}(Y, X_i)$.

Разумеется, такое неявное описание не даёт никаких гарантий *существования* определяемого объекта — соответствующий функтор запросто может оказаться непредставимым. Но если удаётся доказать, что функтор представим, то представляющий объект X, во-первых, автоматически будет обладать некоторыми «универсальными свойствами», а во-вторых, будет единственен с точностью до *единственного* изоморфизма, сохраняющего эти свойства.

Упражнение 10.10. Зафиксируем множество $E \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{S}et$ и рассмотрим функтор из категории (левых) модулей над фиксированным кольцом K в категорию множеств, сопоставляющий каждому модулю M множество $\mathrm{Hom}_{\mathscr{S}et}(E, M)$ всех теоретико-множественных отображений из E в M. Убедитесь, что этот функтор копредставим, и копредставляющий объект есть модуль $K \otimes E$ всех конечных формальных K-линейных комбинаций элементов множества E (он называется *свободным* K-модулем с *базисом* E).

Упражнение 10.11. Убедитесь, что тензорное произведение $U \otimes V$ векторных пространств U и V копредставляет функтор $\mathscr{V}ect \longrightarrow \mathscr{S}et$, сопоставляющий каждому векторному пространству W множество билинейных отображений $U \times V \longrightarrow W$.

10.8.1. Пример: произведение $A \times B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ произвольной категории $\mathscr{C}$ определяется как объект, представляющий функтор $Y \mapsto \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)$ из $\mathscr{C}^{\mathrm{opp}}$ в $\mathscr{S}et$. Если этот функтор представим, то для всех Y мы будем иметь функториальный (по отношению к стрелкам $Y_1 \longrightarrow Y_2$) изоморфизм $\beta_Y : \mathrm{Hom}(Y, A \times B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y, A) \times \mathrm{Hom}(Y, B)$.

Следуя доказательству из лем. 10.2, мы можем положить в нём $Y = A \times B$ и записать элемент

$$\beta_{A\times B}(\mathrm{Id}_{A\times B}) \in \mathrm{Hom}(A \times B, A) \times \mathrm{Hom}(A \times B, B)$$

парой стрелок: $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$.

Упражнение 10.12. Убедитесь, что диаграмма $A \xleftarrow{\pi_A} A \times B \xrightarrow{\pi_B} B$ обладает следующим универсальным свойством: для любых двух стрелок $A \xleftarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\psi} B$ существует единственная стрелка $Y \xrightarrow{\varphi\times\psi} A \times B$, такая что $\varphi = \pi_A \circ (\varphi \times \psi)$ и $\psi = \pi_B \circ (\varphi \times \psi)$, причём для любой диаграммы $A \xleftarrow{\pi'_A} C \xrightarrow{\pi'_B} B$, также обладающей этим универсальным свойством, имеется единственный изоморфизм $\gamma : C \xrightarrow{\sim} A \times B$, такой что $\pi_A \circ \gamma = \pi'_A$, $\pi_B \circ \gamma = \pi'_B$.

10.8.2. Пример: копроизведение $A \otimes B$ объектов $A, B \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ определяется двойственным образом, т. е. как объект, копредставляющий ковариантный функтор

$$Y \mapsto \mathrm{Hom}(A, Y) \times \mathrm{Hom}(B, Y)$$

из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{S}et$. Обращая все стрелки в предыдущем примере, мы можем охарактеризовать копроизведение как объект, включающийся в диаграмму $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$, универсальную в том смысле, что для любой пары стрелок $A \xrightarrow{\varphi} Y \xleftarrow{\psi} B$ в $\mathscr{C}$ имеется единственный морфизм $A \otimes B \xrightarrow{\varphi\otimes\psi} Y$, такой что $\varphi = (\varphi \otimes \psi)\circ i_A$, $\psi = (\varphi \otimes \psi)\circ i_B$.

Упражнение 10.13. Убедитесь, что если такая тройка $A \xrightarrow{i_A} A \otimes B \xleftarrow{i_B} B$ существует, то она единственна с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с отображениями $i_{A,B}$.

Упражнение 10.14. Покажите, что в категориях множеств и топологических пространств произведения и копроизведения — это, соответственно, прямые (теоретико множественные и топологические) произведения и дизъюнктные объединения; в категории (всех) групп — это прямые и свободные[1] произведения; в категории коммутативных колец с единицей и модулей над фиксированным коммутативным кольцом с единицей — это прямые и тензорные произведения.

10.9. Сопряжённые функторы.

Если пара функторов

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

между произвольными категориями $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$ связана функториальным по $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ и $Y \in \mathscr{D}$ изоморфизмом

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y)) \tag{10-14}$$

то F называется *левым сопряжённым* функтором к G, а G — *правым сопряжённым* функтором к F. С каждой парой сопряжённых функторов связана пара естественных преобразований:

$$F\circ G \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}\ , \quad \mathrm{Id}_{\mathscr{C}} \xrightarrow{\varrho} G\circ F\ . \tag{10-15}$$

Стрелка $FG(Y) \xrightarrow{\lambda_Y} Y$, задающая действие преобразования λ над $Y \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{D}$, является образом элемента $\mathrm{Id}_{G(Y)}$ при изоморфизме (10-14), написанном для $X = G(Y)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(FG(Y), Y) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(G(Y), G(Y)) \ni \mathrm{Id}_{G(Y)}\ .$$

Двойственным образом, стрелка $X \xrightarrow{\varrho_X} GF(X)Y$, задающая действие преобразования ϱ над $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$, получается из $\mathrm{Id}_{F(X)}$ при изоморфизме (10-14), написанном для $Y = F(X)$:

$$\mathrm{Id}_{F(X)} \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), F(X)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, GF(X))\ .$$

Упражнение 10.15. Убедитесь, что функтор $E \longmapsto E\otimes K$ из упр. 10.10, сопоставляющий множеству E свободный правый K-модуль с базисом E, является левым сопряжённым к забывающему функтору из категории правых K-модулей в категорию множеств. Что делают в этом случае естественные преобразования (10-15) ?

Упражнение 10.16 (сопряжённость и (ко) представимость). Докажите, что

а) для существования левого сопряжённого функтора F к данному функтору $\mathscr{C} \xleftarrow{G} \mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $X \in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ ковариантный функтор

$$\mathscr{D} \xrightarrow{Y \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))} \mathscr{S}et \tag{10-16}$$

был копредставим, и буде это так, искомый левый сопряжённый функтор будет переводить X в копредставляющий объект функтора (10-16);

[1]например, свободное произведение двух экземпляров группы $\mathbb{Z}$ — это свободная (некоммутативная) группа $\mathbb{F}_2$ с двумя образующими

б) для существования правого сопряжённого функтора G к данному функтору $\mathscr{C} \xrightarrow{F} \mathscr{D}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $Y \in \operatorname{Ob}\mathscr{D}$ предпучок

$$\mathscr{C} \xrightarrow{X \longmapsto \operatorname{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X),Y)} \mathscr{S}et \tag{10-17}$$

был представим, и буде это так, искомый левый сопряжённый функтор будет переводить X в копредставляющий объект функтора (10-17).

10.9.1. Пример: индуцированные и коиндуцированные представления. Пусть есть расширение $\Bbbk$-алгебр с единицами $A \subset B$ над произвольным полем $\Bbbk$. Обозначим через $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ категории конечномерных левых A- и B-модулей (т. е. конечномерных представлений этих алгебр линейными операторами). Имеется естественный *функтор ограничения*

$$\operatorname{Res}_A^B : \mathscr{B} \longrightarrow \mathscr{A} ,$$

который тождественно действует на объектах и просто рассматривает всякий B-модуль W как модуль над подалгеброй $A \subset B$. Этот функтор имеет левый и правый сопряжённые функторы, которые называются, соответственно, *индуцированием* и *коиндуцированием* представлений с подалгебры A на алгебру B и строятся следующим образом.

Для заданного A-модуля V обозначим через

$$\operatorname{Ind}_A^B(V) = B \underset{A}{\otimes} V = B \otimes V / (ba \otimes v - b \otimes av)$$

фактор тензорного произведения векторных пространств $B \otimes V$ по подпространству, порождённому всевозможными соотношениями *A-эквивариантности*

$$ba \otimes v = b \otimes av \qquad (\text{для всех } b \in B,\ a \in A,\ v \in V)\,.$$

На этом пространстве алгебра B действует левым умножением: $b(b' \underset{A}{\otimes} v) = (bb') \underset{A}{\otimes} v$, и имеются естественный по $V \in \mathscr{A}$ и $W \in \mathscr{B}$ изоморфизм $\operatorname{Hom}_B(B \underset{A}{\otimes} V, W) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(V, W)$, который сопоставляет B-линейной стрелке $B \underset{A}{\otimes} V \xrightarrow{\varphi} W$ стрелку

$$V \xrightarrow{v \mapsto \varphi(1 \otimes v)} W\,. \tag{10-18}$$

и обратный к нему изоморфизм $\operatorname{Hom}_B(B \underset{A}{\otimes} V, W) \xleftarrow{\sim} \operatorname{Hom}_A(V, W)$, который переводит A-линейную стрелку $V \xrightarrow{\psi} W$ в B-линейную стрелку

$$V \xrightarrow{b \otimes v \mapsto b\psi(v)} W \tag{10-19}$$

Упражнение 10.17. Проверьте, что формулы (10-18) и (10-19) действительно задают взаимно обратные естественные преобразования бифункторов $\operatorname{Hom}_B(B \underset{A}{\otimes} V, W) \rightleftarrows \operatorname{Hom}_A(V, W)$.

Двойственным образом, обозначим через

$$\operatorname{Coind}_A^B(V) = \operatorname{Hom}_A(B, V)$$

пространство всех A-линейных отображений из алгебры B, которая рассматривается как A-модуль с действием на нём алгебры A левыми умножениями, в A-модуль V. Заметим, что на этом пространстве имеется каноническая структура *левого* B-модуля, индуцированная *правым* умножением в алгебре B: действие $b \in B$ на стрелку $B \xrightarrow{\psi} V$ превращает её в стрелку

$$b\psi : B \xrightarrow{b' \mapsto \psi(b'b)} V\ .$$

Упражнение 10.18. Проверьте равенство $(b_1 b_2)\psi = b_1(b_2\psi)$ и постройте канонический (т. е. функториальный по $V \in \mathscr{A}$ и $W \in \mathscr{B}$) изоморфизм[1] $\operatorname{Hom}_B(W, \operatorname{Hom}_A(B, V)) \simeq \operatorname{Hom}_A(W, V)$.

[1] подсказка: B-линейной стрелке $\varphi : W \xrightarrow{w \mapsto \varphi_w} \operatorname{Hom}_A(B, V)$ следует сопоставить стрелку $W \xrightarrow{w \mapsto \varphi_w(1)} V$; обратное отображение переводит A-линейную стрелку $V \xrightarrow{\psi} W$ в B-линейную стрелку $W \xrightarrow{\psi} V$ в отображение $w \mapsto \varphi_w : B \xrightarrow{b \mapsto \psi(bw)} V$