§9. Линейные представления конечных групп

Если специально не оговаривается противное, всюду в этой лекции через G обозначается конечная группа, а через $\Bbbk$ — алгебраически замкнутое поле, причём $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

9.1. Разложение представлений на неприводимые. Мы будем обозначать множество всех различных неприводимых представлений группы G через $\mathrm{Irr}(G)$, а сами неприводимые представления — через $\lambda : G \longrightarrow \mathrm{GL}(U_\lambda)$, и писать в этом случае, что $\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$ или $U_\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$.

Согласно теор. 8.1 любой конечномерный G-модуль V является прямой суммой конечного числа неприводимых:

$$V = \bigoplus_i V_i \,, \tag{9-1}$$

где каждый из V_i изоморфен ровно одному из неприводимых $U_\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$. Сумма всех слагаемых этого разложения, изоморфных данному $U_\lambda \in \mathrm{Irr}(G)$, называется λ-*изотипным* подмодулем и обозначается $V_\lambda \subset V$. Целое неотрицательное число

$$m_\lambda(V) = \dim V_\lambda / \dim U_\lambda \,,$$

равное количеству изоморфных U_λ прямых слагаемых разложения (9-1), называется *кратностью* неприводимого представления λ в представлении V.

Покажем, что кратности $m_\lambda(V)$ и изотипные подмодули $V_\lambda \subset V$ зависят только от V и λ, но не от выбора разложения (9-1). Для этого вначале зафиксируем у каждого G-модуля какое-нибудь разложение в сумму неприводимых подмодулей и дадим инвариантную характеризацию кратностям и изотипным подмодулям.

Лемма 9.1
Для любых G-модулей V и W

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} m_\lambda(V)\, m_\lambda(W) \,. \tag{9-2}$$

В частности, $m_\lambda(V) = \dim \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, V)$ не зависит от выбора разложения (9-1).

Доказательство. Пусть $V = \bigoplus_i V_i$ и $W = \bigoplus_j W_j$ два разложения в сумму неприводимых подмодулей. Тогда $\mathrm{Hom}_G(V, W) = \mathrm{Hom}_G(\bigoplus_i V_i, \bigoplus_j W_j) = \bigoplus_{ij} \mathrm{Hom}_G(V_i, W_j)$, где каждый из V_i, W_j неприводим. По лемме Шура для $U_\lambda, U_{\lambda'} \in \mathrm{Irr}(G)$

$$\mathrm{Hom}_G(U_\lambda, U_{\lambda'}) = \begin{cases} \Bbbk \cdot \mathrm{Id}_{U_\lambda} & \text{при } \lambda' = \lambda \\ 0 & \text{при } \lambda' \neq \lambda \,. \end{cases} \tag{9-3}$$

Отсюда получается формула (9-2). Второе утверждение является её частным случаем. □

Следствие 9.1
$\dim \mathrm{Hom}_G(V, W) = \dim \mathrm{Hom}_G(W, V)$ для любых G-модулей V и W. □

Следствие 9.2
Представления V и W изоморфны тогда и только тогда, когда $m_\lambda(V) = m_\lambda(W)$ для всех λ.

Доказательство. Модули с одинаковыми разложениями (9-1), ясное дело, изоморфны. Если же $m_\lambda(V) \neq m_\lambda(W)$ при каком-то λ, то $\dim \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, V) \neq \dim \mathrm{Hom}_G(U_\lambda, W)$ и такие модули не могут быть изоморфны. □

9.1.1. Каноническая свёртка. Для любых G-модулей V, W пространство $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ является тривиальным G-модулем (подмодулем неподвижных векторов действия G на $\mathrm{Hom}(V,W)$ сопряжениями). Отображение

$$\mathrm{Hom}_G(V,W)\otimes V \xrightarrow{\varphi\otimes v\mapsto\varphi(v)} W \tag{9-4}$$

является гомоморфизмом G-модулей и называется *канонической свёрткой*.

Упражнение 9.1. Убедитесь, что отображение (9-4) получается ограничением на подпространство $\mathrm{Hom}_G(V,W)\otimes V\subset \mathrm{Hom}(V,W)\otimes V$ линейного оператора $\mathrm{Hom}(V,W)\otimes V\longrightarrow W$, который переходит в тождественный эндоморфизм пространства $\mathrm{Hom}(V,W)$ при каноническом изоморфизме $\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(V,W)\otimes V\,,\,W)\simeq \mathrm{Hom}(V,W)^*\otimes\mathrm{Hom}(V,W)\simeq \mathrm{End}\big(\mathrm{Hom}(V,W)\big)$.

Если зафиксировать в пространстве $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ какой-нибудь базис $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_m$, то G-модуль $\mathrm{Hom}_G(V,W)\otimes V$ разложится в прямую сумму G-подмодулей $(\Bbbk\cdot\varphi_i)\otimes V$, каждый из которых изоморфен G-модулю V:

$$\mathrm{Hom}_G(V,W)\otimes V\simeq\Big(\bigoplus_{i=1}^m\Bbbk\cdot\varphi_i\Big)\otimes V=(\varphi_1\otimes V)\oplus(\varphi_2\otimes V)\oplus\,\cdots\,\oplus(\varphi_m\otimes V)\;,$$

(для сокращения записи мы будем опускать $\Bbbk$ перед φ_i, однако сам φ_i будем оставлять, чтобы запомнить в обозначении, какому именно базисному гомоморфизму $\varphi_i:V\longrightarrow W$ отвечает соответствующее прямое слагаемое V). В этих обозначениях каноническая свёртка (9-4) описывается формулой

$$(\varphi_1\otimes v_1,\,\varphi_2\otimes v_2,\,\dots,\,\varphi_m\otimes v_m)\longmapsto\sum_i\varphi_i(v_i) \tag{9-5}$$

Лемма 9.2

Каноническая свёртка $\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,V)\otimes U_\lambda\longrightarrow V$ является изоморфизмом на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda\subset V$. В частности, этот подмодуль не завит от способа разложения V в прямую сумму неприводимых подмодулей.

Доказательство. Возьмём произвольное разложение $V=V_1\oplus V_2\oplus\,\cdots\,\oplus V_n$ на неприводимые подмодули и перенумеруем их так, чтобы первые m были изоморфны U_λ, а остальные нет. Согласно (9-3), $\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,V)=\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,\bigoplus_i V_i)=\bigoplus_{i=1}^m\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,V_i)$. Выберем в каждом одномерном пространстве $\mathrm{Hom}(U_\lambda,V_i)$ (где $i\leqslant m$) какой-нибудь базисный изоморфизм $\varphi_i:U_\lambda\xrightarrow{\sim}V_i$. Тогда m операторов $\varPhi_i:u\longmapsto(0,\,\dots\,,0,\,\varphi_i(u)\,,0,\,\dots\,,0)\in V=\bigoplus_j V_j$ составят базис в $\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,V)$, а G-модуль $\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,V)\otimes U_\lambda$ разложится в прямую сумму

$$\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,V)\otimes U_\lambda\simeq(\varPhi_1\otimes U_\lambda)\oplus(\varPhi_2\otimes U_\lambda)\oplus\,\cdots\,\oplus(\varPhi_m\otimes U_\lambda)\;,$$

и каноническая свёртка, согласно формуле (9-5), будет действовать по правилу

$$\big(\varPhi_1\otimes u_1,\,\varPhi_2\otimes u_2,\,\dots,\,\varPhi_m\otimes u_m\big)\longmapsto\big(\varphi_1(u_1),\,\varphi_2(u_2),\,\dots,\,\varphi_m(u_m),\,0,\,\dots\,,0\big).$$

Её образ содержится в $V_\lambda=\bigoplus_{i\leqslant m}V_i\subset V$ и любой вектор $(v_1,v_2,\dots,v_m,\,0,\,\dots\,,0)\in V_\lambda$ получается из единственного вектора $\big(\varphi_1^{-1}(v_1),\,\varphi_2^{-1}(v_2),\,\dots,\,\varphi_m^{-1}(v_m)\big)\in\bigoplus_{i=1}^m\varphi_i\otimes U_\lambda$. □

Следствие 9.3

Образ каждой изотипной компоненты при любом гомоморфизме G-модулей содержится в изотипной компоненте того же типа.

Доказательство. Запишем $v\in V_\lambda$ как $v=\sum\psi_iu_i$ с $\psi_i\in\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,V)$ и $u_i\in U_\lambda$. Тогда $\varphi v=\sum\varphi\psi_iv\in W_\lambda$ для любого $\varphi\in\mathrm{Hom}_G(V,W)$, поскольку $\varphi\psi_i\in\mathrm{Hom}_G(U_\lambda,W)$. □

Следствие 9.4
$W_\lambda = W \cap V_\lambda$ для любого G-подмодуля $W \subset V$.

Доказательство. Применим предыдущее следствие к вложению $V \subset W$. □

9.2. Строение групповой алгебры. Групповая алгебра $\Bbbk[G]$ конечной группы G представляет собою $|G|$-мерное векторное пространство с каноническим базисом, состоящим из элементов группы. Элементы групповой алгебры имеют вид $c = \sum_{g\in G} c_g\, g$ и перемножаются как

$$\Big(\sum_g a_g g\Big)\Big(\sum_h b_h h\Big) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f\,,$$

где $c_f = \sum\limits_{gh=f} a_g b_h = \sum\limits_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum\limits_s a_s b_{s^{-1}f}$.

Действие группы G на $\Bbbk[G]$ умножениями с левой стороны называется *левым регулярным представлением* и обозначается

$$L : G \xrightarrow{g\mapsto L_g} \operatorname{End}(\Bbbk[G])\,, \quad (\text{где } L_g : h \mapsto gh.)$$

Для каждого $\lambda \in \operatorname{Irr}(G)$ обозначим через $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ λ-изотипную компоненту левого регулярного представления. Таким образом, $\Bbbk[G] = \oplus I_\lambda$ (сумма по всем λ для которых $I_\lambda \neq 0$).

Лемма 9.3
Каждое подпространство $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ является двусторонним идеалом.

Доказательство. Все G-подмодули левого регулярного представления тавтологически являются левыми идеалами. В частности, I_λ тоже левый идеал. Отображения $\Bbbk[G] \longrightarrow \Bbbk[G]$, задаваемые умножением на произвольно заданный элемент справа и умножением на произвольно заданный элемент слева, перестановочны. Поэтому умножение справа на любой элемент является G-эндоморфизмом левого регулярного представления. По сл. 9.3 оно переводит I_λ в себя. Значит, I_λ является правым идеалом. □

Следствие 9.5
Если $f \in I_\lambda$, а $g \in I_{\lambda'}$ и $\lambda \neq \lambda'$, то $fg = 0$.

Доказательство. $fg \in I_\lambda \cap I_{\lambda'} = 0$. □

Упражнение 9.2. Докажите, что I_λ являются минимальными (по включению) двусторонними идеалами алгебры $\Bbbk[G]$, и что все двусторонние идеалы групповой алгебры исчерпываются прямыми суммами идеалов I_λ.

Лемма 9.4
Любое представление $\varrho : \Bbbk[G] \longrightarrow \operatorname{End}(V)$, не содержащее в своём разложении неприводимого представления λ, переводит I_λ в нуль. Неприводимое представление $\lambda : \Bbbk[G] \longrightarrow \operatorname{End}(U_\lambda)$ эпиморфно отображает I_λ на всю алгебру эндоморфизмов $\operatorname{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. Поскольку I_λ является левым идеалом, для любого $v \in V$ подпространство

$$W = I_\lambda v = \{fv \mid f \in I_\lambda\}$$

является G-подмодулем в V, а отображение $I_\lambda \longrightarrow W$, переводящее f в fv, является сюрьективным гомоморфизмом G-модулей. По сл. 9.3 весь модуль W является в этом случае λ-изотипным, т. е. $W = W_\lambda$. С другой стороны, если λ-изотипная компонента $V_\lambda = 0$, то по сл. 9.4 $W_\lambda = W \cap V_\lambda = 0$. Это доказывает первое утверждение. Из него следует, что каждое неприводимое представление $\lambda : \Bbbk[G] \longrightarrow \operatorname{End}(U_\lambda)$ отображает в нуль все прямые слагаемые разложения $\Bbbk[G] = \bigoplus\limits_{\lambda'} I_{\lambda'}$ кроме слагаемого I_λ. По сл. 8.4 неприводимое представление λ эпиморфно. Поэтому $\lambda(I_\lambda) = \operatorname{End}(U_\lambda)$. □

Теорема 9.1 (теорема Машке)
Гомоморфизм алгебр $\mathrm{Rep} : \Bbbk[G] \longrightarrow \prod\limits_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$, переводящий элемент $f \in \Bbbk[G]$ в набор операторов, которыми этот элемент действует во всех неприводимых представлениях группы G, является изоморфизмом алгебр. Его ограничение на изотипный идеал $I_\lambda \subset \Bbbk[G]$ является изоморфизмом I_λ на матричную алгебру $\mathrm{End}(U_\lambda)$.

Доказательство. По лем. 9.4 гомоморфизм Rep эпиморфно отображает I_λ на компоненту

$$(\,\dots\,,0,\,\dots\,,0\,,\mathrm{End}(U_\lambda)\,,0,\,\dots\,,0,\,\dots\,)\;\in\prod_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)}\mathrm{End}(U_\lambda)\,.$$

В частности, гомоморфизм Rep эпиморфен. Остаётся доказать его инъективность. Если элемент $f \in \Bbbk[G]$ действует нулевым оператором во всех неприводимых представлениях, то он действует нулевым оператором вообще в любом представлении. В частности, в левом регулярном представлении $f \cdot 1 = 0$, откуда $f = 0$. □

Следствие 9.6
Множество $\mathrm{Irr}(G)$ конечно и $\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} \dim^2 U_\lambda = |G|$. □

Упражнение 9.3. Докажите, что $m_\lambda(\Bbbk[G]) = \dim U_\lambda$.

9.2.1. Центр групповой алгебры. Напомним, что *центром* кольца или группы K называется множество всех элементов, мультипликативно коммутирующих со всеми элементами K. Элемент $z \in \Bbbk[G]$ коммутирует со всей алгеброй тогда и только тогда, когда он коммутирует с её базисом. Поэтому центр групповой алгебры

$$Z_{\Bbbk[G]} = \{z \in \Bbbk[G] \mid zx = xz\ \ \forall\, x\in\Bbbk[G]\ \} = \{z \in \Bbbk[G] \mid gzg^{-1} = z\ \ \forall\, g\in G\ \}\,.$$

Условие $gzg^{-1} = z$ на элемент $z = \sum\limits_h z_h h$ означает, что все элементы h, лежащие в одном классе сопряжённости, входят в z с одним и тем же коэффициентом. Таким образом, сопоставляя каждому классу сопряженности $C \subset G$ элемент

$$z_C = \sum_{h\in C} h \tag{9-6}$$

мы получаем базис в $Z_{\Bbbk[G]}$. В частности, $\dim Z_{\Bbbk[G]}$ равна числу классов сопряжённых элементов в группе G. Мы будем обозначать это число через $\mathrm{cl}(G)$ и называть *числом классов*.

Ещё одно описание центра получается из теоремы Машке. Алгебра $\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ представляет собой прямую сумму матричных алгебр и её центр равен прямой сумме их центров. Центр каждой матричной алгебры $\mathrm{End}(U_\lambda)$ состоит из скалярных матриц $c\cdot\mathrm{Id}_{U_\lambda}$. Отсюда вытекает

Следствие 9.7
Число неприводимых представлений группы G равно числу классов сопряжённых элементов: $|\mathrm{Irr}(G)| = \mathrm{cl}(G)$. □

9.2.2. Базисные идемпотенты. Обозначим прообраз λ-того базисного центрального элемента прямой суммы $\bigoplus\limits_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ при отображении Rep из теоремы Машке через

$$e_\lambda = \mathrm{Rep}^{-1}\,(\,\dots\,,0,\,\mathrm{Id}_{U_\lambda}\,,\,0,\,\dots\,) \in I_\lambda \subset \Bbbk[G]. \tag{9-7}$$

Элементы e_λ называются *неприводимыми* (или *минимальными*) *идемпотентами*. По построению, они образуют базис центра групповой алгебры и перемножаются по правилам

$$e_\lambda e_{\lambda'} = \begin{cases} e_\lambda & \text{при } \lambda' = \lambda\\ 0 & \text{при } \lambda' \neq \lambda\,.\end{cases} \tag{9-8}$$

В любом представлении $\Bbbk[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ каждый из неприводимых идемнотентов e_λ тождественно действует на λ-изотипной компоненте $V_\lambda \subset V$ и переводит в нуль все остальные изотипные компоненты, т. е. является G-инвариантным проектором $V \xrightarrow{e_\lambda} V_\lambda$. Это свойство однозначно определяет элементы e_λ.

Упражнение 9.4. Проверьте, что главный левый идеал $\Bbbk[G]\cdot e_\lambda$ является минимальным (по включению) левым идеалом и как G-модуль (относительно действия G умножениями слева) изоморфен неприводимому представлению U_λ. Покажите также, что двусторонний идеал, порождённый e_λ, есть I_λ.

9.2.3. Пример: простенькие представления симметрических групп. Напомню, что классы сопряжённых элементов симметрической группы S_n состоят из всех перестановок фиксированного циклового типа и, тем самым, взаимно однозначно соответствуют n-клеточным диаграммам Юнга[1]. Таким образом, число неприводимых представлений симметрической группы равно *числу разбиений*[2] $p(n)$.

У любой симметрической группы S_n имеются два одномерных представления — тривиальное и *знаковое* представление $\mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow \{\pm 1\}$, в котором перестановка σ действует умножением на знак $\mathrm{sgn}(\sigma)$. Базисными идемпотентами, отвечающими этим представлениям являются операторы симметризации и альтернирования

$$e_{(n)} = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} g \quad \text{и} \quad e_{(1^n)} = \frac{1}{n!}\sum_{g\in S_n} \mathrm{sgn}(g)\, g$$

Упражнение 9.5. Покажите, что каждый из них лежит в центре и является идемпотентным (тем самым, в любом представлении эти операторы являются S_n-инвариантными проекторами).

Легко видеть, что образ оператора симметризации лежит в тривиальной изотипной компоненте, и он тождественно на ней действует. Аналогично, образ оператора альтернирования лежит в знаковой изотипной компоненте, и он тоже действует на ней тождественно.

Каждая симметрическая группа S_n имеет $(n-1)$-мерное *симплициальное представление* несобственной группой правильного $(n-1)$-мерного симплекса[3].

Упражнение 9.6 (симплициальное и тавтологическое представления S_n). Покажите, что несобственная группа правильного n-вершинного симплекса с центром в начале координат пространства $\Bbbk^{n-1}$ изоморфна S_n и неприводимо действует в $\Bbbk^{n-1}$. Покажите также, что *тавтологическое представление* S_n перестановками стандартных базисных векторов пространства $\Bbbk^n$ является прямой суммой тривиального одномерного представления в линейной оболочке суммы базисных векторов и симплициального представления в гиперплоскости векторов с нулевой суммой координат.

Неприводимые представления группы S_3, имеющей ровно три класса сопряжённости, исчерпываются тривиальным, знаковым и симплициальным представлением группой треугольника. Если обозначить цикл $|1,2,3\rangle$ через τ, а транспозицию $|1,2\rangle$ — через σ, то элементы неприводимые идемпотенты, отвечающие этим представлениям, будут иметь вид

$$\begin{aligned}
e_{(3)} &= \frac{1}{6}\sum_{g\in S^3} g = (1+\tau+\tau^2+\sigma+\sigma\tau+\sigma\tau^2)/6 \\
e_{(1^3)} &= \frac{1}{6}\sum_{g\in S^3} \mathrm{sgn}(g) g = (1+\tau+\tau^2-\sigma-\sigma\tau-\sigma\tau^2)/6 \\
e_{(2,1)} &= 1 - e_{(3)} - e_{(1^3)} = (2-\tau-\tau^2)/3
\end{aligned}$$

(про симметризацию $e_{(3)}$ и альтернирование $e_{(1^3)}$ мы это уже установили выше; $e_{(2,1)}$ аннулирует тривиальный и знаковый модули и действует тождественным оператором в представлении группой треугольника).

[1] длины строк диаграммы суть длины независимых циклов, на которые раскладывается перестановка

[2] напомню, что количество всех n-клеточных диаграмм обозначается $p(n)$ и называется *числом разбиений* числа n (в сумму неупорядоченных целых неотрицательных слагаемых)

[3] при $n = 2$ оно совпадает со знаковым

Упражнение 9.7. Проверьте прямым вычислением в групповой алгебре, что $e_{(2,1)}$ лежит в центре и идемпотентен.

У группы S_4, имеющей 5 классов сопряжённости, кроме тривиального, знакового и 3-мерного представления несобственной группой тетраэдра имеется ещё одно трёхмерное представление собственной группой куба и двумерное представление группой треугольника, индуцированное факторизацией $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ по подгруппе Клейна $D_2 \subset S_4$.

Упражнение 9.8. Покажите, что все эти представления неприводимы, причём два трёхмерных не изоморфны и получаются одно из другого тензорным умножением на знаковое представление. Разложите в сумму неприводимых S_4-модулей представления группы вращений куба в пространстве функций на множестве а) вершин б) рёбер в) граней этого куба.

9.2.4. Скалярное произведение на $\Bbbk[G]$. Левое регулярное представление

$$L : \Bbbk[G] \longrightarrow \mathrm{End}(\Bbbk[G])$$

вкладывает групповую алгебру $\Bbbk[G]$ в алгебру $\mathrm{End}(\Bbbk[G])$, на которой имеется стандартная симметричная билинейная форма — след композиции. Ограничение этой формы на $L(\Bbbk[G])$ задаёт на $\Bbbk[G]$ симметричное скалярное произведение

$$(f,g) = \mathrm{tr}\,(L_f L_g) = \mathrm{tr}\,(L_{fg})\ .$$

Поскольку след левого умножения на единицу группы равен $|G|$, а умножение на любой другой элемент группы бесследно, скалярные произведения элементов группы задаются формулой

$$(g,h) = \begin{cases} |G| & \text{при } h = g^{-1} \\ 0 & \text{при } h \neq g^{-1}. \end{cases} \tag{9-9}$$

Таким образом, скалярное произведение невырождено[1], и двойственным базисом к базису $\{g\}$ из групповых элементов является базис $\{|G|^{-1} \cdot g^{-1}\}$. В частности, каждый элемент $c \in \Bbbk[G]$ разлагается по базису из групповых элементов в виде

$$c = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (g^{-1}, c) \cdot g \tag{9-10}$$

Упражнение 9.9. Покажите, что левое и правое умножение на заданный элемент сопряжены другу другу относительно скалярного произведения: $(fg,h) = (f,gh)$ и выведите отсюда, что ортогональное дополнение к любому левому идеалу в $\Bbbk[G]$ является правым идеалом, а ортогональное дополнение к правому — левым (тем самым, ортогональное дополнение к любому двустороннему идеалу тоже двусторонний идеал).

Изоморфизм $\mathrm{Rep} : \Bbbk[G] \xrightarrow{\sim} \prod\limits_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$ из теоремы Машке позволяет вычислять скалярные произведения в терминах следов действия элементов в неприводимых представлениях.

Предложение 9.1 (формула Паншереля)
$(f,g) = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} \dim(U_\lambda) \cdot \mathrm{tr}\,(\lambda(fg))$ для любых $f, g \in \Bbbk[G]$.

Доказательство. Вычислим $\mathrm{tr}\,(L_{fg})$ в алгебре $\bigoplus\limits_{\lambda \in \mathrm{Irr}(G)} \mathrm{End}(U_\lambda)$. Он равен сумме по всем неприводимым представлениям λ следов левого умножения на $\lambda(fg)$ в $\mathrm{End}(U_\lambda)$. След левого умножения на матрицу M в матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(\Bbbk)$ равен $n \cdot \mathrm{tr}\,(M)$, поскольку каждая матричная единица E_{ij} входит в ME_{ij} с коэффициентом m_{ii}. □

[1] отметим, что если характеристика поля делит порядок группы, то это не так

Следствие 9.8
Базисные идемпотенты составляют ортогональный базис центра групповой алгебры и имеют скалярные квадраты $(e_\lambda, e_\lambda) = \left(\dim U_\lambda\right)^2$.

Следствие 9.9
Разложение левого регулярного представления в прямую сумму изотипных подмодулей

$$\Bbbk[G] = \bigoplus_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} I_\lambda$$

является *ортогональным* разложением, и неприводимые идемпотенты являются *ортогональными проекциями* единицы $1 \in \Bbbk[G]$ на идеалы I_λ.

Следствие 9.10
Базисный идемпотент e_λ выражается через элементы группы по формуле

$$e_\lambda = \frac{\dim U_\lambda}{|G|} \sum_{g\in G} \mathrm{tr}\,\left(\lambda(g^{-1})\right)\, g \tag{9-11}$$

В частности, при любом представлении $\Bbbk[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ правая часть этого равенства перейдёт в G-инвариантный проектор на λ-изотипный подмодуль $V_\lambda \subset V$.

Доказательство. Согласно формуле (9-10) $e_\lambda = |G|^{-1} \sum\limits_{\lambda'\in\mathrm{Irr}(G)} (g^{-1}, e_\lambda)\cdot g$. По формуле Планшереля

$$(g^{-1}, e_\lambda) = \sum_{\lambda'\in\mathrm{Irr}(G)} \dim\left(U_{\lambda'}\right)\cdot \mathrm{tr}\,\left(\lambda'(g^{-1}e_\lambda)\right) = \dim\left(U_\lambda\right)\cdot \mathrm{tr}\,\left(\lambda(g^{-1})\right)\,,$$

поскольку умножение слева на e_λ аннулирует все неприводимые $U_{\lambda'}$ с $\lambda' \neq \lambda$, а на U_λ действует тождественным оператором. □

9.3. Характеры. Для произвольного линейного представления $\varrho : [G] \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ линейная форма $\chi_\varrho : \Bbbk[G] \longrightarrow \Bbbk$ на групповой алгебре, сопоставляющая каждому элементу $f \in G$ след его действия на V

$$\chi_\varrho(f) = \mathrm{tr}\,\varrho(f)$$

называется *характером* представления ϱ. В силу того, что след оператора не меняется при сопряжении, характер любого представления постоянен на классах сопряжённых элементов.

Поскольку любая линейная форма однозначно задаётся своими значениями на базисных векторах, пространство линейных форм $\Bbbk[x]^*$ естественно отождествляется с пространством $\Bbbk^G$ функций $G \longrightarrow \Bbbk$. С другой стороны, скалярное произведение на групповой алгебре позволяет отождествить $\Bbbk[G]^*$ с $\Bbbk[G]$ при помощи изоморфизма, сопоставляющего вектору функционал скалярного умножения на этот вектор:

$$\Bbbk[G] \xrightarrow{f\longmapsto (f,*)} \Bbbk[G]^*\,. \tag{9-12}$$

Согласно (9-9) базисный вектор $g \in G$ перейдёт при этом изоморфизме в умноженную на $|G|$ форму, вычисляющую координату вдоль базисного вектора g^{-1}, а функция $G \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$ — в элемент групповой алгебры

$$\widehat{\varphi} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \varphi\left(g^{-1}\right)\cdot g$$

(его иногда называют *преобразованием Фурье* от функции φ). Отметим, что по сл. 9.10 преобразования Фурье от характеров неприводимых представлений пропорциональны неприводимым идемпотентам:

$$\widehat{\chi}_\lambda = \frac{1}{\dim U_\lambda}\cdot e_\lambda \tag{9-13}$$

Перенесём при помощи изоморфизма (9-12) скалярное произведение из групповой алгебры в пространство функций на группе, полагая по-определению

$$(\varphi,\psi) = (\widehat{\varphi},\widehat{\psi}) = \frac{1}{|G|^2}\sum_{g,h\in G}\varphi\left(g^{-1}\right)\psi\left(h^{-1}\right)(g,h) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\varphi\left(g^{-1}\right)\psi\left(g\right) \tag{9-14}$$

Из (9-13) и сл. 9.8 вытекает

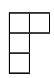
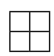
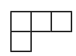
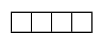
Следствие 9.11
Неприводимые характеры образуют ортонормальный базис в пространстве функций, постоянных на классах сопряжённых элементов. □

9.3.1. Вычисление характеров. Если группа G действует на векторном пространстве перестановками базисных векторов, то значение характера такого представления на элементе $g\in G$ равно числу неподвижных элементов перестановки g. В частности, сказанное перед формулой (9-9) означало, что характер регулярного представления имеет вид

$$\chi_L(g) = \begin{cases} |G| & \text{если} \quad g = e \\ 0 & \text{если} \quad g \neq e \end{cases}$$

Упражнение 9.10. Вычислите характеры тавтологического и симплициального представлений S_n.

Характеры геометрических представлений обычно без проблем вычисляются прямым сложением собственных значений соответствующих поворотов и отражений. Например, легко видеть, что значения характеров пяти представлений симметрической группы S_4, перечисленных перед упр. 9.8, задаются таблицей:

классы					
число элементов	1	6	3	8	6
значения характеров:					
тривиального	1	1	1	1	1
знакового	1	−1	1	1	−1
тетраэдрального	3	−1	−1	0	−1
кубического	3	1	−1	0	1
треугольного	2	0	2	−1	0

из которой непосредственно видно, что они ортонормальны.

Лемма 9.5
Для любых двух представлений V, W группы G с характерами χ_U и χ_V

$$\chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g) \tag{9-15}$$
$$\chi_{V\otimes W}(g) = \chi_V(g)\chi_W(g) \tag{9-16}$$
$$\chi_{V^*}(g) = \chi_V(g^{-1}) \tag{9-17}$$
$$\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}(g) = \chi_V(g^{-1})\chi_W(g) \tag{9-18}$$

Доказательство. Поскольку любой оператор g из конечной группы полупрост, в пространствах V и W имеются базисы $\{v_i\}$ и $\{w_j\}$ из собственных векторов g. Пусть α_i и β_j — соответствующие наборы собственных чисел. Набор собственных чисел g в представлении $V\oplus W$ получается объединением этих наборов, откуда следует (9-15). Собственными числами g в представлении $V\otimes W$ являются всевозможные попарные произведения $\alpha_i\beta_j$, что даёт (9-16). Формула (9-17) следует из того, что матрица g в двойственном представлении транспонирована к матрице g^{-1} в исходном (см. n° 8.2). Последняя формула следует из двух предыдущих. □

Упражнение 9.11. Докажите, что производящие функции для характеров симметрических и внешних степеней представления V имеют вид:

$$\sum_{\nu\geqslant 0}\chi_{\Lambda^\nu V}(g)\,t^\nu = \det(1+t\,g) \qquad \sum_{\nu\geqslant 0}\chi_{S^\nu V}(g)\,t^\nu = \frac{1}{\det(1-t\,g)}$$

Следствие 9.12
Характер любого представления V выражается через неприводимые характеры χ_λ как

$$\chi_V = \sum_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} m_\lambda(V)\cdot\chi_\lambda \tag{9-19}$$

где $m_\lambda(V)$ обозначает кратность вхождения U_λ в разложение V на неприводимые (см. n° 9.1).

Доказательство. Применяем (9-15) к разложению V в прямую сумму неприводимых. □

Следствие 9.13
$\dim\mathrm{Hom}_G(V,W) = (\chi_V,\chi_W)$ для любых G-модулей V и W.

Доказательство. Обе части равны $\sum\limits_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} m_\lambda(V)m_\lambda(W)$: левая — по лем. 9.1, правая — в силу сл. 9.12 и ортонормальности характеров. □

Следствие 9.14
Кратность вхождения неприводимого представления U_λ в произвольное представление V равна скалярному произведению их характеров $m_\lambda(V) = (\chi_\lambda,\chi_V)$.

Доказательство. Скалярно умножаем обе части (9-19) на χ_λ и пользуемся ортонормальностью характеров. □

Следствие 9.15
Представление V неприводимо тогда и только тогда, когда $(\chi_V,\chi_V) = 1$.

Доказательство. Из ортонормальности характеров и сл. 9.12 вытекает, что

$$(\chi_V,\chi_V) = \sum_{\lambda\in\mathrm{Irr}(G)} m_\lambda^2(V)\,,$$

где все $m_\lambda(V)$ целые неотрицательные. Такая сумма равна единице только если она состоит из одного слагаемого, равного единице. □

Упражнение 9.12. Опишите все неприводимые представления и вычислите их характеры для групп: а) D_n б) A_4 в) A_5 г) S_5.