§8. Пространства с операторами

8.1. Приводимость и разложимость. Пусть на векторном пространстве V над полем $\Bbbk$ действует некоторое множество $R \subset \mathrm{End}(V)$ линейных операторов $V \longrightarrow V$. В этой ситуации мы будем говорить, что V является *R-модулем*. Множество всех операторов, которые можно получить из R при помощи взятия конечных линейных комбинаций и композиций, образует ассоциативную подалгебру[1] $A_R \subset \mathrm{End}(V)$ в алгебре всех линейных операторов на V. Мы будем называть эту алгебру *ассоциативной оболочкой* множества операторов R.

Отметим, что для заданных подпространств $U, W \subset V$ условия $RU \subset W$ и $A_R U \subset W$ эквивалентны друг другу (здесь и далее $RU = \{fu \mid f \in R,\ u \in U\}$ и мы всегда пишем fv вместо $f(v)$ для f из R или из A_R).

Подпространство $U \subset V$ называется *R-подмодулем* (или *R-инвариантным* подпространством), если $f(U) \subset U$ для всех операторов из R. R-подмодуль $U \subset V$ называется собственным, если он отличен от нуля и от V. R-модуль V называется *неприводимым* (или *простым*), если в нём нет собственных R-подмодулей. R-модуль V называется *разложимым*, если он представляется в виде прямой суммы собственных R-подмодулей. R-модуль V называется *вполне приводимым* (или *полупростым*), если он является прямой суммой неприводимых R-подмодулей.

Упражнение 8.1. Убедитесь, что простота, полупростота, (не) приводимость и (не) разложимость модуля V относительно множества операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$ и относительно ассоциативной оболочки A_R этих операторов эквивалентны друг другу.

Эта же терминология применяется в ситуации, когда множество операторов R снабжено дополнительной структурой, например, является алгеброй (как A_R) или группой.

Лемма 8.1 (лемма Шура I)
Пусть ненулевой линейный оператор $V \xrightarrow{f} V$ перестановочен со всеми операторами из некоторого множества $R \subset \mathrm{End}(V)$. Если пространство V неприводимо как R-модуль, то f изоморфизм. Если вдобавок основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то $f = \lambda \cdot \mathrm{Id}_V$ для некоторой ненулевой константы $\lambda \in \Bbbk$.

Доказательство. Из перестановочности f со всеми операторами из R вытекает, что $\ker f$ и $\operatorname{im} f$ являются R-подмодулями в V и потому тривиальны. По условию, $\ker f \neq V$ и $\operatorname{im} f \neq 0$. Следовательно, $\ker f = 0$ и $\operatorname{im} f = V$, т. е. f биективен[2]. Если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, f обладает ненулевым собственным подпространством. Поскольку оно R-инвариантно, оно совпадает со всем V. □

8.1.1. Пример: пространство с одним оператором. Пусть V конечномерно, а множество R состоит из одного оператора $F : V \longrightarrow V$. Его ассоциативная оболочка $A_R \subset \mathrm{End}(V)$ представляет собою алгебру многочленов от оператора F и является образом гомоморфизма вычисления

$$\mathrm{ev}_F : \Bbbk[t] \xrightarrow{g(t) \mapsto g(F)} \mathrm{End}(V) \tag{8-1}$$

переводящего многочлен $f \in \Bbbk[t]$ в результат подстановки в него вместо t оператора F. Поскольку $\dim(V) < \infty$ гомоморфизм ev_F имеет ненулевое ядро. Поскольку все идеалы в $\Bbbk[t]$ главные, это ядро состоит из всех многочленов, делящихся на приведённый многочлен наименьшей положительной степени, аннулирующий F. Этот многочлен называется *минимальным многочленом* оператора F и обозначается μ_F. Таким образом, алгебра A_R изоморфна кольцу алгебраических чисел

$$A_R = \operatorname{im} \mathrm{ev}_F = \Bbbk[t]/(\mu_F)\,.$$

---

[1] напомним, что (ассоциативной) *алгеброй* над полем $\Bbbk$ называется векторное пространство A над $\Bbbk$, наделённое структурой кольца (не обязательно коммутативного), сложение в котором — это сложение векторов в A, а умножение $A \times A \longrightarrow A$ билинейно

[2] отметим, что конечномерность V в этом рассуждении несущественна

Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ любой оператор имеет собственный вектор. Тем самым, над алгебраически замкнутым полем неприводимость пространства V означает, что $\dim V = 1$, а полупростота означает диагонализуемость оператора F. По этой причине диагонализуемые операторы в теории представлений называются *полупростыми*. Отметим, что имеется много приводимых, но неразложимых пространств: например, 2-мерное координатное пространство $\Bbbk^2$ с оператором

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

приводимо, но неразложимо.

Над произвольным полем $\Bbbk$ гомоморфизм (8-1) наделяет пространство V структурой модуля над кольцом $\Bbbk[t]$: по определению, действие многочлена $f(t) \in \Bbbk[t]$ на вектор $v \in V$ состоит в применении к вектору v оператора $f(F)$, т. е.

$$fv \overset{\text{def}}{=} \mathrm{ev}_F(f)v = f(F)v\,.$$

Поскольку оператор умножения на любой многочлен является оператором из ассоциативной оболочки A_F, инвариантность, разложимость, приводимость и полупростота пространства V как модуля над алгеброй A_R и как модуля над алгеброй $\Bbbk[t]$ означают одно и то же. Кольцо $\Bbbk[t]$ является коммутативным кольцом главных идеалов. По теореме о строении конечномерных $\Bbbk[t]$-модулей, пространство V изоморфно прямой сумме

$$\frac{\Bbbk[t]}{(p_1^{m_1})} \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_2^{m_2})} \oplus \,\cdots\, \oplus \frac{\Bbbk[t]}{(p_s^{m_s})}\,,$$

где все многочлены $p_i \in \Bbbk[t]$ неприводимы, а действие оператора F состоит в умножении на t.

Упражнение 8.2. Пусть $p \in \Bbbk[t]$ неприводим. Убедитесь, что пространство $\Bbbk[t]/(p^m)$ с оператором умножения на t всегда неразложимо, однако неприводимо если и только если $m = 1$.

Таким образом, всякое неприводимое пространство с оператором изоморфно фактор кольцу $\Bbbk[t]/(p)$ (где $p \in \Bbbk[t]$ неприводим) с оператором умножения на t, а всякое неразложимое пространство изоморфно пространству вида $\Bbbk[t]/(p^m)$.

Упражнение 8.3. Докажите, что для полупростоты оператора F над (произвольно заданным) полем $\Bbbk$ необходимо и достаточно, чтобы он аннулировался каким-нибудь многочленом, полностью разлагающимся в $\Bbbk[t]$ на попарно различные линейные множители (в частности, если оператор диагонализуем на всём пространстве, то он диагонализуем и на любом своём инвариантном подпространстве).

8.1.2. Пример: коммутирующие операторы. Если все операторы из R коммутируют друг с другом, то каждое собственное подпространство любого оператора $f \in R$ R-инвариантно:

$$fv = \lambda v \Rightarrow \;\forall\, g \in R \; f(gv) = g(fv) = g(\lambda v) = \lambda gv\,.$$

Из этого замечания вытекает, что все операторы из R имеют в V общий собственный вектор. Действительно, это так, если $\dim V = 1$ или если все операторы скалярны. Если же хоть один из операторов $f \in R$ не скалярен, то у него есть ненулевое собственное подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid fv = \lambda v\}$$

с $\dim V_\lambda < \dim V$ и по предыдущему $R(V_\lambda) \subset V_\lambda$. Используя индукцию по $\dim V$, заключаем, что в V_λ имеется общий для всех операторов из R собственный вектор.

Аналогичное рассуждение показывает, что если все операторы из R диагонализуемы, то их можно диагонализовать одновременно в одном общем базисе — для этого надо разложить V в прямую сумму собственных подпространств какого-нибудь нескалярного оператора $f \in R$. Это разложение R-инвариантно, и по упр. 8.3 ограничение каждого оператора из R на каждое собственное подпространство f диагонализуемо на этом подпространстве. Используя индукцию по размерности, мы одновременно диагонализуем все операторы из R на каждом прямом слагаемом.

Следствие 8.1
Над алгебраически замкнутым полем всякий простой модуль над произвольным множеством коммутирующих операторов одномерен. □

8.2. Линейные представления группы. Действие группы G на векторном пространстве V линейными преобразованиями, т. е. гомоморфизм групп $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$, называется *линейным представлением* группы G на векторном пространстве V, а само пространство V называется в этом случае G-модулем. Когда это не приводит к путанице, мы обозначаем результат применения оператора $\varrho(g)$ к вектору $v \in V$ просто через gv.

Прямая сумма, тензорное произведение, а так же внешние и симметрические степени G-модулей U, V также являются G-модулями, на которых группа G действует по правилам:

$$g(u,v) = (gu, gv)\ , \quad g(u \otimes v) = (gu) \otimes (gv)\ , \quad g(u \wedge v) = (gu) \wedge (gv) \quad \text{и т. д.}$$

Для любого G-подмодуля $W \subset U$ на фактор пространстве U/W действие G корректно индуцируется по обычному правилу $g[v] = [gv]$.

Упражнение 8.4. Проверьте, что это определение корректно.

Двойственное представление $\varrho^* : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V^*)$ к представлению $\varrho : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ определяется так, чтобы свёртка векторов с ковекторами сохранялась при действии группы G, т. е. чтобы при всех $g \in G$, $\xi \in V^*$ и $v \in V$ выполнялось равенство $\langle\, \varrho^*(g)\,\xi\ ,\ \varrho(g)\,v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, v\,\rangle$. Поскольку $\varrho(g)$ является изоморфизмом, это равенство равносильно равенству

$$\langle\, \varrho^*(g)\,\xi\ ,\ v\,\rangle = \langle\, \xi\,,\, \varrho\left(g^{-1}\right) v\,\rangle\,.$$

Таким образом, результатом применения оператора $\varrho^*(g)$ к линейной форме $\xi \in V^*$ является линейная форма $v \mapsto \xi\left(g^{-1}v\right)$, т. е. $\varrho^*(g) = \varrho\left(g^{-1}\right)^*$ есть оператор, двойственный к $\varrho(g)^{-1}$. Иными словами, матрицы операторов $\varrho(g)$ и $\varrho^*(g)$ в двойственных базисах пространств V и V^* транспонированы и обратны друг другу.

Действие G на пространстве линейных операторов $\mathrm{Hom}(U,V) = U^* \otimes V$ между двумя G-модулями U и V, согласно предыдущим определениям, происходит по формуле

$$g\ :\ \varphi \longmapsto g\varphi g^{-1}\,. \tag{8-2}$$

Подпространство неподвижных векторов этого действия обозначается через $\mathrm{Hom}_G(U,V)$ и называется пространством G-*инвариантных*[1] операторов. Оно состоит из всех операторов $U \xrightarrow{F} V$, перестановочных с действием группы G (т. е. таких, что $gF = Fg\ \forall\, g \in G$).

Представления называются *изоморфными*, если между их пространствами имеется линейный изоморфизм, перестановочный с действием G.

Упражнение 8.5. Пусть образ d-мерного представления ϱ лежит в $\mathrm{SL}(V)$. Докажите, что представления $\Lambda^k\varrho$ и $\Lambda^{d-k}\varrho$ изоморфны для всех $0 \leqslant k \leqslant d$.

Лемма 8.2
В любом конечномерном представлении любой конечной группы G над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит порядок группы, все элементы группы действуют диагонализуемыми операторами.

Доказательство. Каждый оператор из G аннулируются многочленом $t^{|G|} - 1 = 0$, который не имеет кратных корней, если порядок группы не делится на характеристику поля. По упр. 8.3 такой оператор полупрост. □

Подчеркнём, что если группа не коммутативна, то диагонализовать все операторы одновременно в одном базисе может оказаться невозможно. Но для конечных групп из лем. 8.2 и сл. 8.1 вытекает

---

[1] для перестановочных с действием G операторов $U \xrightarrow{F} W$ между G-модулями U и W имеется множество названий: гомоморфизмы G модулей, *сплетающие операторы*, G-*эквивариантные* операторы, G-*морфизмы* и т. п.

Следствие 8.2
Всякое линейное представление конечной абелевой группы над алгебраически замкнутым полем, характеристика которого не делит порядок группы, является прямой суммой одномерных представлений. □

8.2.1. Конечномерные представления конечных абелевых групп. Всюду в этом разделе мы обозначаем через G конечную абелеву группу и предполагаем, что основное поля $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, а $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$.

Так как любой линейный оператор на одномерном пространстве скалярен, одномерное представление G задаётся (мультипликативным) гомоморфизмом

$$\chi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_1(\Bbbk) = \Bbbk^* , \tag{8-3}$$

который сопоставляет каждому элементу группы скаляр, которым этот элемент действует на пространстве представления:

$$gv = \chi(g)\, v .$$

Гомоморфизмы (8-3) называются *характерами* абелевой группы G. Одномерный неприводимый G-модуль, отвечающий характеру χ, обозначается через V_χ.

Упражнение 8.6. Докажите, что $V_\chi \simeq V_\psi$ как G-модули тогда и только тогда, когда $\chi = \psi$.

Характеры образуют мультипликативную абелеву подгруппу в алгебре $\Bbbk^G$ всех функций на группе G со значениями в поле $\Bbbk$. Эта группа называется *двойственной по Понтрягину* к группе G и обозначается $G^\wedge$. Единицей в $G^\wedge$ служит *тривиальный характер* $\chi_e \equiv 1$, отвечающий тривиальному представлению.

Упражнение 8.7. Проверьте, что характер тензорного произведения двух одномерных представлений абелевой группы G равен произведению их характеров в $G^\wedge$, а характер двойственного представления обратен в $G^\wedge$ характеру исходного.

Группа G действует на алгебре $\Bbbk^G$ по правилу $f(x) \xmapsto{g} gf(x) \overset{\text{def}}{=} f(xg)$. Это линейное представление, как и любое другое, является прямой суммой одномерных неприводимых представлений

$$\Bbbk^G = \bigoplus_{\chi} V_\chi^{\oplus m_\chi} ,$$

Каждый G-подмодуль V_χ состоит из функций $G \xrightarrow{f} \Bbbk$, удовлетворяющих равенству $f(xg) = \chi(g)f(x)$. Подставляя в это равенство $x = e$, получаем $f(g) = \dfrac{1}{f(e)}\chi(g)$, откуда f пропорциональна характеру $\chi \in \Bbbk^G$. Таким образом, каждое неприводимое представление V_χ входит в разложение $\Bbbk^G$ в прямую сумму неприводимых G-подмодулей ровно один раз, причём соответствующее одномерное подпространство в $\Bbbk^G$ натянуто на характер χ. В частности, характеры составляют базис в $\Bbbk^G$, и $|G^\wedge| = |G|$.

Отображение $g \mapsto \mathrm{ev}_g$, сопоставляющее элементу $g \in G$ функцию вычисления

$$\mathrm{ev}_g : G^\wedge \xrightarrow{\chi \mapsto \chi(g)} \Bbbk ,$$

является гомоморфизмом групп $G \longrightarrow G^{\wedge\wedge}$, поскольку

$$\mathrm{ev}_g(\chi_1\chi_2) = \mathrm{ev}_g(\chi_1)\,\mathrm{ev}_g(\chi_2) \qquad \text{и} \qquad \mathrm{ev}_{g_1g_2}(\chi) = \mathrm{ev}_{g_1}(\chi)\,\mathrm{ev}_{g_2}(\chi) .$$

Если g лежит в его ядре, то $\chi(g) = 1$ для всех $\chi \in G^\wedge$, т. е. g тривиально действует в любом представлении группы G. В частности, для любой функции $f \in \Bbbk^G$ будем иметь $f(xg) = f(x)$, что возможно только если $xg = x$ для каждого $x \in G$, т. е. только когда $g = e$.

Таким образом, мы получаем для любой конечной абелевой группы канонический изоморфизм $G \xrightarrow{\sim} G^{\wedge\wedge}$. Это частный случай *двойственности Понтрягина*, которая имеет место для произвольных локально компактных топологических абелевых групп.

8.2.2. Групповая алгебра. Теория представлений любой группы G эквивалентна теории представлений ассоциативной алгебры $\Bbbk[G]$ образованной всевозможными *конечными* формальными линейными комбинациями элементов группы

$$\sum_{g\in G} c_g\, g$$

с произвольными коэффициентами $c_g \in \Bbbk$. Сложение и умножение таких выражений происходит по стандартным правилам раскрытия скобок (при этом константы $c_g \in \Bbbk$ коммутируют с элементами группы и перемножаются так, как это происходит в поле $\Bbbk$, а элементы группы перемножаются согласно имеющемуся в группе закону композиции), т. е.

$$\Big(\sum_g a_g g\Big)\Big(\sum_h b_h h\Big) = \sum_{gh} a_g b_h gh = \sum_f c_f f\,,$$

где $c_f = \sum\limits_{gh=f} a_g b_h = \sum\limits_t a_{ft^{-1}} b_t = \sum\limits_s a_s b_{s^{-1}f}$.

Алгебра $\Bbbk[G]$ называется *групповой алгеброй* группы G над полем $\Bbbk$. Группа G вложена в алгебру $\Bbbk[G]$ в качестве мультипликативной подгруппы и по-определению образует базис векторного пространства $\Bbbk[G]$ над полем $\Bbbk$.

Упражнение 8.8. Докажите, что сопоставление целому числу m монома t^m устанавливает изоморфизм между а) групповой алгеброй $\Bbbk[\mathbb{Z}]$ аддитивной группы $\mathbb{Z}$ и кольцом полиномов Лорана $\Bbbk[t,t^{-1}]$ б) групповой алгеброй $\Bbbk[\mathbb{Z}/(n)]$ аддитивной группы вычетов $\mathbb{Z}/(n)$ и фактор кольцом $k[t]/(t^n-1)$.

Всякому линейному представлению $G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ канонически соответствует представление групповой алгебры $\Bbbk[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$, которое по линейности продолжает представление группы и является гомоморфизмом ассоциативных алгебр. Образ этого гомоморфизма представляет собою линейную оболочку всех операторов из группы G и является одновременно ассоциативной оболочкой A_G всех этих операторов. Теория представлений группы G тождественна теории представлений ассоциативной алгебры $\Bbbk[G]$.

Остаток этого параграфа будет посвящён некоторым общим свойствам модулей над ассоциативными алгебрами.

8.3. Полупростые модули над ассоциативной алгеброй. Пусть A — ассоциативная алгебра над произвольным полем $\Bbbk$. Гомоморфизм $\Bbbk$-алгебр $\varrho : A \longrightarrow \mathrm{End}V$, называется *линейным представлением* алгебры A в векторном пространстве V, а пространство V называется в этой ситуации A-модулем. Перестановочные с действием всех операторов из A линейные отображения между A-модулями называются *A-линейными* (или *гомоморфизмами* A-модулей). Пространство таких отображений обозначается через $\mathrm{Hom}_A(U,V)$.

Предложение 8.1 (лемма Шура II)
Если A-модули U и V неприводимы, то всякий ненулевой A-гомоморфизм $f \in \mathrm{Hom}_A(U,V)$ является изоморфизмом. Если вдобавок основное поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, то

$$\dim \mathrm{Hom}_A(U,V) = \begin{cases} 0, \text{ если } U \ncong V \\ 1, \text{ если } U \cong V\,. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку f A-линеен, $\ker f \subset U$ и $\operatorname{im} f \subset V$ являются A-подмодулями. Если $f \neq 0$, то $\ker f \neq U$ и $\operatorname{im} f \neq 0$, откуда $\ker f = 0$, $\operatorname{im} f = V$, т. е. f биективен. Если основное поле алгебраически замкнуто, и $g : U \longrightarrow V$ — ещё один A-гомоморфизм, то оператор $f^{-1}g : U \longrightarrow U$ скалярен по предыдущей версии леммы Шура (см. лем. 8.1). Поэтому $g = \lambda f$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$. □

Упражнение 8.9. Пусть на пространстве V задан оператор π, удовлетворяющий уравнению $\pi^2 = \pi$. Покажите, что а) $V = \ker\pi \oplus \operatorname{im}\pi$ и π проектирует V на $\operatorname{im}\pi$ вдоль $\ker\pi$
б) если π является A-гомоморфизмом, то подпространства $\ker\pi$ и $\operatorname{im}\pi$ являются A-подмодулями

Лемма 8.3 (критерии полупростоты)
Следующие свойства конечномерного[1] A-модуля W попарно эквивалентны:

1) W полупрост (т. е. является прямой суммой простых A-модулей)
2) W линейно порождается простыми подмодулями
3) для любого A-подмодуля $U \subset W$ существует A-подмодуль $V \subset W$, такой что $W = U \oplus V$
4) для любого A-подмодуля $U \subset W$ существует $\pi \in \mathrm{End}_A(W)$, такой что $\pi^2 = \pi$ и $\mathrm{im}\,\pi = U$

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна. Покажем, что (2) $\Rightarrow$ (3). Пусть W линейно порождается набором простых подмодулей V_α. Тогда для любого подмодуля $U \subsetneq W$ можно выбрать из числа V_α такие подмодули $V_1, V_2, \dots, V_m$, что $W = U \oplus V_1 \oplus V_2 \oplus \dots \oplus V_m$. А именно, берём в качестве V_1 произвольный неприводимый модуль, не содержащийся в U (таковой существует, поскольку $U \neq W$ и W линейно порождается простыми подмодулями). Пересечение $V_1 \cap U \subsetneq V_1$, равно нулю, так как V_1 прост. Поэтому сумма U и V_1 — прямая. Если $U \oplus V_1 \neq W$, то повторяя рассуждение с заменой U на $U \oplus V_1$ выбираем следующий неприводимый подмодуль $V_2 \not\subset U \oplus V_1$, и видим что сумма U, V_1 и V_2 тоже прямая, и т. д. пока собираемая прямая сумма не исчерпает всё пространство W. При $U = 0$ мы получаем заодно импликацию (2) $\Rightarrow$ (1).

Импликация (3) $\Rightarrow$ (4) очевидна: проектор $W = U \oplus V \xrightarrow{\pi} U$ вдоль V перестановочен с действием A. Импликация (4) $\Rightarrow$ (1) доказывается индукцией по $\dim W$. Если $\dim W = 1$ или если W прост, доказывать нечего. Если W обладает собственным подмодулем $U \subsetneq W$, и $\pi : W \twoheadrightarrow U$ соответствующий проектор, то по упр. 8.9 $W = U \oplus V$, где $V = \ker \pi$ тоже является A-подмодулем. Заметим теперь, что если свойство (4) выполняется в модуле W, то оно выполняется и во всех его подмодулях $M \subset W$, поскольку любой подмодуль $N \subset M$ является одновременно подмодулем в W, и ограничение на M A-линейного проектора $W \twoheadrightarrow N$ даёт A-линейный проектор M на N. В частности, свойство (4) выполнено в U и в V. Поскольку их размерности строго меньше $\dim W$, по индукции, U и V являются прямыми суммами простых модулей. Поэтому $W = U \oplus V$ тоже является прямой суммой простых подмодулей. $\square$

Упражнение 8.10. Покажите, что для любого A-линейного проектора π оператор $1 - \pi$ тоже является A-линейным проектором (на $\ker \pi$).

Следствие 8.3
Прямые суммы, подмодули и фактор модули полупростых модулей также являются полупростыми модулями.

Доказательство. Прямая сумма полупростых модулей линейно порождается простыми подмодулями слагаемых. Каждое инвариантное подпространство в подмодуле полупростого модуля является образом A-инвариантного проектора. Фактор модуль полупростого модуля линейно порождается образами его простых подмодулей. По лемме Шура эти образы либо нулевые, либо изоморфны исходным простым подмодулям, т. е. тоже просты. $\square$

Упражнение 8.11. Покажите, что для любого векторного пространства V имеет место изоморфизм алгебр $\mathrm{End}\,(V^{\oplus n}) \simeq \mathrm{Mat}_n\,(\mathrm{End}(V))$.

Теорема 8.1 (теорема плотности Джекобсона[2])
Пусть конечномерное векторное пространство V полупросто над ассоциативной подалгеброй $A \subset \mathrm{End}(V)$. Обозначим алгебру всех операторов, перестановочных с подалгеброй A, через $B = \mathrm{End}_A(V)$. Тогда алгебра всех операторов, перестановочных с подалгеброй B, совпадает с A, т. е. $\mathrm{End}_B(V) = A$.

[1] требование конечномерности не является существенным, и преодолевается применением леммы Цорна

[2] в англоязычной литературе её обычно называют *double commutator theorem*, но в русском языке термин «коммутатор» в этом контексте практически никогда не используется

Доказательство. По определению, $A \subset \mathrm{End}_B(V)$. Чтобы установить обратное включение, зафиксируем в пространстве V некоторый базис $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ и покажем, что для любого оператора $\varphi \in \mathrm{End}_B(V)$ найдётся оператор $a \in A$, такой что $\varphi e_i = a e_i$ при всех i — это повлечёт за собою равенство $\varphi = a$.

Рассмотрим n-кратную прямую сумму $W = V^{\oplus n}$ и введём на ней структуру модуля над алгебрами A, B и $\mathrm{End}_B(V)$, полагая $f(v_1, v_2, \dots, v_n) = (fv_1, fv_2, \dots, fv_n)$. Обозначим вектор $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in W$ через e. Нам надо показать, что $\varphi e \in A\,e$. Поскольку W является полупростым A-модулем, A-подмодуль $A\,e \subset W$ является образом некоторого A-линейного проектора $W \xrightarrow{\pi} Ae$, тождественно действующего на самом Ae. Если π коммутирует с φ, то $\varphi(e) = \varphi(\pi e) = \pi(\varphi e) \in A\,e$, что и требуется. Остаётся проверить, что π коммутирует с φ.

Для этого запишем действие эндоморфизма $\pi : V^{\oplus n} \longrightarrow V^{\oplus n}$ матрицей (π_{ij}) с элементами $\pi_{ij} \in \mathrm{End}(V)$ (оператор $\pi_{ij} : V \longrightarrow V$ задаёт проекцию на i-тое слагаемое суммы $V^{\oplus n}$ результата применения π к j-тому слагаемому этой суммы). Поскольку π перестановочен с действием A на W, каждая компонента π_{ij} перестановочна с действием A на V, т. е. все $\pi_{ij} \in \mathrm{End}_A(V) = B$. Поэтому диагональная матрица, по диагонали которой стоят одинаковые элементы $\varphi \in \mathrm{Hom}_B(V)$, коммутирует с π. $\square$

Следствие 8.4 (теорема Бернсайда)
Пусть поле $\Bbbk$ алгебраически замкнуто. Если конечномерное пространство V неприводимо над множеством операторов $R \subset \mathrm{End}(V)$, то ассоциативная оболочка этих операторов совпадает со всей алгеброй эндоморфизмов: $A_R = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. В частности, для любого конечномерного неприводимого представления $G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ любой группы G ассоциированное с ним представление групповой алгебры $G \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ эпиморфно.

Доказательство. По лемме Шура $\mathrm{End}_{A_R}(V) = \Bbbk$. По теореме плотности $A_R = \mathrm{End}_{\Bbbk}(V)$. $\square$

8.4. Полная приводимость представлений конечной группы. Пусть G конечная группа, и $\varrho : \Bbbk[G] \longrightarrow \mathrm{End}(V)$ её линейное представление, продолженное по линейности на всю групповую алгебру. Векторы из V, которые остаются на месте под действием всех преобразований из группы G (а значит, и из алгебры $\Bbbk[G]$) составляют G-подмодуль, который обозначается

$$V^G = \{\, v \in V \mid gv = v \ \ \forall\, g \in G \,\}$$

и называется пространством *инвариантных* векторов представления G. Если характеристика поля $\Bbbk$ не делит порядок группы $|G|$, то оператор «бекар»:

$$v \mapsto v^{\natural} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} gv\,, \tag{8-4}$$

сопоставляющий каждому вектору $v \in V$ центр тяжести его G-орбиты в аффинном пространстве $\mathbb{A}(V)$, очевидно, перестановочен с действием G и линейно проектирует V на[1] V^G.

Упражнение 8.12. Приведите пример конечной группы G (с $|G| \vdots \mathrm{char}(\Bbbk)$) и неразложимого G-модуля V с ненулевым подмодулем инвариантов V^G.

Теорема 8.2
Любое линейное представление V конечной группы G над полем, характеристика которого не делит $|G|$, вполне приводимо.

[1] условие $\mathrm{char}(\Bbbk) \nmid |G|$ необходимо для того, чтобы оператор (8-4) тождественно действовал на неподвижных векторах; если $|G| \vdots \mathrm{char}(\Bbbk)$, сумма $\sum g$ аннулирует пространство V^G

Доказательство. Покажем, что любой G-подмодуль $U \subset V$ является образом G-инвариантного проектора. Напомним, что группа G действует на пространстве всех линейных операторов $\mathrm{Hom}(V,U)$ по формуле (8-2): $\varphi \longmapsto g\varphi g^{-1}$. Покажем, что при проекции

$$\mathrm{Hom}(V,U) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_G(V,U)$$

на подмодуль G-инвариантных операторов образ $\pi^\natural = |G|^{-1}\sum\limits_{g\in G} g\pi g^{-1}$ любого проектора

$$\pi : V \twoheadrightarrow U$$

тоже является проектором V на U. Для этого достаточно убедиться, что $\pi^\natural$ оставляет любой вектор $u \in U$ на месте. Поскольку $g^{-1}U \subset U$ для всех $g \in G$, и π тождественно действует на U, для любого $u \in U$ имеем $g\pi g^{-1}u = g\pi(g^{-1}u) = gg^{-1}u = u$. Поэтому $\pi^\natural(u) = u$. □

8.4.1. Пример: действие S_n и $\mathrm{GL}(V)$ на $V^{\otimes n}$. Алгебра $\mathrm{End}_{S_n} V^{\otimes n}$ операторов

$$V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n},$$

коммутирующих со стандартным действием симметрической группы S_n на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей, отождествляется серией канонических изоморфизмов

$$\mathrm{End}(V^{\otimes n}) \simeq V^{\otimes n*} \otimes V^{\otimes n} \simeq V^{*\otimes n} \otimes V^{\otimes n} \simeq (V^* \otimes V)^{\otimes n} \simeq \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$$

с подпространством симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n(\mathrm{End}(V)) \subset \mathrm{End}(V)^{\otimes n}$.

Упражнение 8.13 (принцип Аронгольда). Для конечномерного векторного пространства W над полем характеристики нуль покажите, что пространство симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n(W) \subset W^{\otimes n}$ линейно порождается n-тыми тензорными степенями $w^{\otimes n} = w \otimes w \otimes \cdots \otimes w$ векторов $w \in W$.

Из этого упражнения вытекает, что алгебра $\mathrm{End}_{S_n} V^{\otimes n}$ является образом естественного представления алгебры $\mathrm{End}(V)$ на $V^{\otimes n}$, заданного на разложимых тензорах правилом

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = gv_1 \otimes gv_2 \otimes \cdots \otimes gv_n\,. \tag{8-5}$$

Иначе говоря, всякое линейное преобразование пространства $V^{\otimes n}$, перестановочное с действием S_n, имеет вид (8-5) для некоторого $g : V \longrightarrow V$.

Из теор. 8.2 вытекает, что верно и обратное: всякое линейное преобразование пространства $V^{\otimes n}$, коммутирующее со всеми эндоморфизмами V, является линейной комбинацией перестановок тензорных сомножителей.

8.4.2. Тип симметрии тензора. По теор. 8.2 пространство $V^{\otimes n}$ является прямой суммой неприводимых представлений симметрической группы S_n. Для каждого неприводимого представления $\lambda : S_n \longrightarrow \mathrm{GL}(U_\lambda)$ обозначим через

$$W_\lambda \subset V^{\otimes n} \tag{8-6}$$

сумму всех неприводимых S_n-подмодулей, изоморфных представлению λ. Тогда

$$V^{\otimes n} = \bigoplus_\lambda W_\lambda\,. \tag{8-7}$$

Это разложение называется разложением по *типам симметрии* тензоров. Про тензоры, лежащие в W_λ, говорят, что они имеют *тип симметрии* λ.

Например, симметрическая группа $S_2 \simeq \mathbb{Z}/(2)$ имеет ровно 2 неприводимых представления: одномерные представления с характерами $+1$ и -1. Соответствующее разложение по типам — это разложение квадратичных тензоров в сумму симметричных и кососимметричных:

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V)\,.$$

Отметим, что размерности этих компонент суть $n(n+1)/2$ и $n(n-1)/2$.

Упражнение 8.14. Покажите, что симметрическая группа S_3 имеет ровно 3 неприводимых представления: одномерное тривиальное, одномерное знаковое (в котором $g \in S_3$ действует умножением на знак перестановки) и двумерное — группой треугольника.

Соответственно, пространство кубических тензоров распадается по типам симметрии на три компоненты

$$V^{\otimes 3} = \mathrm{Sym}^3(V) \oplus W_{(2,1)} \oplus \mathrm{Skew}^3(V)\,, \tag{8-8}$$

где $W_{(2,1)}$ является образом проектора (3-6) из n° 3.1.2. Согласно упр. 3.3, тензоры $w \in W_{(2,1)}$ имеют *лиевский* тип симметрии: будучи рассмотрены как трилинейные формы на V^*, они удовлетворяют *соотношению Якоби*

$$w(x,y,z) + w(y,z,x) + w(z,x,y) = 0\,.$$

8.4.3. Разложение W_λ в тензорное произведение. По лемме Шура, полная линейная группа $\mathrm{GL}(V)$, действуя на $V^{\otimes n}$ по формуле (8-5), сохраняет тип симметрии тензора, т. е. переводит каждую компоненту (8-6) разложения (8-6) в себя. Более того, если зафиксировать какое-нибудь разложение каждой такой компоненты в прямую сумму *неприводимых* S_n-подмодулей

$$W_\lambda = \bigoplus_i V_i \tag{8-9}$$

каждый из которых изоморфен U_λ и представляет собой линейную оболочку S_n-орбиты некоторого вектора $e_i \in W_\lambda$:

$$V_i = \Bbbk[S_n]\, e_i \simeq U_\lambda\,, \tag{8-10}$$

то действие оператора $g \in \mathrm{GL}(V)$ на W_λ можно, как и в доказательстве теор. 8.1, задать матрицей (g_{ij}) с элементами $g_{ij} \in \mathrm{End}_{S_n}(U_\lambda)$, такими что $g_{ij} : V_j \longrightarrow V_i$ задаёт проекцию $g(V_j) \subset W_\lambda$ на V_i. По лемме Шура $\mathrm{End}_{S_n}(U_\lambda) = \Bbbk$, т. е. все матрицы $g_{ij} = \gamma_{ij} \cdot \mathrm{Id}_{U_\lambda}$ скалярны. Эту картину можно чуть более симметрично описать следующим образом.

Обозначим через U'_λ абстрактное векторное пространство с базисом e'_i, векторы которого биективно соответствуют векторам $e_i \in W_\lambda$ из формулы (8-10), и зададим на нём действие $\mathrm{GL}(V)$ так, чтобы каждый оператор $g \in \mathrm{GL}(V)$ имел в базисе e'_i матрицу (γ_{ij}), состоящую из описанных выше скаляров γ_{ij}. Тогда на пространстве $U'_\lambda \otimes U_\lambda$ имеется действие прямого произведения $\mathrm{GL}(V) \times S_n$ по правилу $(g,\sigma) : u' \otimes u \longmapsto gu' \otimes \sigma u$. При этом действии подгруппы $S_n \subset \mathrm{GL}(V) \times S_n$ и $\mathrm{GL}(V) \subset \mathrm{GL}(V) \times S_n$, состоящие из пар вида $(1,\sigma)$ и $(g,1)$, коммутируют друг с другом, и сказанное выше означает, что

$$W_\lambda \simeq U'_\lambda \otimes U_\lambda$$

(изоморфизм перестановочен с действием обеих групп S_n и $\mathrm{GL}(V)$).

$\mathrm{GL}(V)$-модуль U'_λ обычно обозначают $\mathbb{S}^\lambda V$. $\mathrm{GL}(V)$-модули $\mathbb{S}^\lambda V$, отвечающие тривиальному и знаковому одномерным представлениям симметрической группы S_n суть симметрическая и внешняя степени $S^n V$ и $\Lambda^n V$ соответственно.

Ответы и указания к некоторым упражнениям