§6. Исчисление массивов, таблиц и диаграмм

6.1. Массивы и элементарные операции над ними. Зафиксируем два конечных упорядоченных множества из n и m элементов:

$$I = \{1, 2, \ldots, n\}, \quad J = \{1, 2, \ldots, m\} \tag{6-1}$$

и будем рассматривать прямоугольные таблицы из n столбцов и m строк, занумерованных элементами I и J соответственно. Такую таблицу a мы будем называть *массивом* и размещать в *первом* квадранте декартовой системы координат так, чтобы элементы из I росли слева направо по горизонтальной оси, а элементы из J росли снизу вверх по вертикальной оси. Содержимое $a(i,j)$ клетки с координатами (i,j) у нас всегда будет целым неотрицательным числом, которое стоит воспринимать как «количество» или «массу». Весь массив удобно представлять себе как набор шариков одинаковой массы, наделенных двумя группами признаков и в соответствии с этим разложенных по ячейкам массива. Мы никогда не будем вычислять с числами $a(i,j)$, но будем перекладывать шарики из ячейки в ячейку, меняя тем самым их принадлежность к тому или иному признаку каждой из двух групп.

С массивом a связан *столбцовый вес* (или I-*вес*)

$$w^I = \Big(\sum_j a(1,j)\,,\ \sum_j a(2,j)\,,\ \ldots\,,\ \sum_j a(n,j)\Big) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}\,, \tag{6-2}$$

представляющий собой n-мерный целочисленный вектор, i-тая координата которого равна общему количеству шариков в i-том столбце. Аналогично определяется *строчный вес* (или J-*вес*)

$$w^J = \Big(\sum_i a(i,1)\,,\ \sum_i a(i,2)\,,\ \ldots\,,\ \sum_i a(i,m)\Big) \in \mathbb{Z}^m_{\geqslant 0}\,. \tag{6-3}$$

Массивы можно транспонировать относительно диагонали $i = j$:

$$a \longmapsto a^t \ :\ a^t(i,j) = a(j,i)\,. \tag{6-4}$$

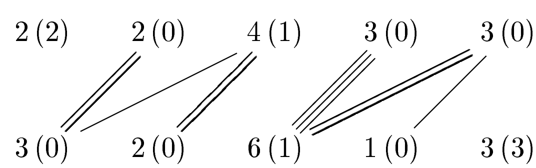
На множестве $\mathscr{M}$ всех массивов действуют четыре набора *элементарных операций*

$$D_j\,,\quad U_j\,,\quad L_i\,,\quad R_i\,,\quad \text{где } 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant m-1.$$

При применении любой из этих операций к данному массиву $a \in \mathscr{M}$ массив a либо никак не меняется, либо ровно один его шарик перемещается ровно на одну клетку вниз (Down), вверх (Up), влево (Left) или вправо (Right) в соответствии с обозначением для операции.

6.1.1. Вертикальные операции D_j и U_j перемещают шар по вертикали в пределах соседних j-той и $(j+1)$-ой строки. Чтобы узнать, какой именно шар следует передвинуть (или убедиться в том, что такого шара нет), следует вначале установить между j-той и $(j+1)$-ой строкой *устойчивое паросочетание*[1]. Делается это следующим образом.

Будем последовательно перебирать шарики в $(j+1)$-ой строке двигаясь слева направо и либо назначать им партнёров в j-той строке, либо объявлять *свободными*. Пусть очередной шарик $ш$ лежит в клетке $(i, j+1)$. Его партнёром называем *самый правый* шар из тех, что лежат в строке j *строго левее* i-того столбца и ещё не назначены никому партнёрами. Если таких шаров нет, шар $ш$ объявляется свободным. После того, как все шары $(j+1)$-ой строки будут разделены на свободные и имеющие партнёров, все шары j-той строки, не являющиеся ни чьими партнёрами, также объявляются свободными. Вот пример такого паросочетания (в скобках указано число свободных шаров):



(6-5)

[1]по-английски: *stable matching*

По определению, операция D_j опускает на одну клетку вниз самый правый свободный шар $(j+1)$-ой строки или ничего не делает, если свободных шаров в $(j+1)$-ой строчке нет. Операция U_j поднимает на одну клетку вверх самый левый свободный шар j-той строки или ничего не делает, если в j-ой строке нет свободных шаров. Так, в примере (6-5) операция D_j (соотв. U_j) опускает вниз (соотв. поднимает вверх) верхний (соотв. нижний) свободный шар в третьей колонке.

Если операция изменяет массив, мы будем говорить, что она действует на этот массив *эффективно*. Из конструкции устойчивого паросочетания ясно, что все свободные шары j-той строки лежат нестрого правее свободных шаров $(j+1)$-ой строки. Поэтому, когда операция D_j действует на массив a эффективно, опущенный ею шар становится самым левым свободным шаром j-той строки в устойчивом паросочетании между преобразованными строками. Стало быть, операция U_j, применённая к массиву $D_j a$ поднимет этот опущенный шар назад, т. е. $U_j D_j a = a$ всякий раз, когда D_j действует на a эффективно. Аналогично, если U_j действует эффективно, то $D_j U_j a = a$.

Говоря неформально, набор вертикальных операций D, U образует структуру, близкую к групповой — исходный массив a однозначно восстанавливается из результата применения к нему слова $D = D_{j_1} \cdots D_{j_k}$ по формуле

$$a = U_{j_k} \cdots U_{j_1} \left(D_{j_1} \cdots D_{j_k}(a)\right)$$

при условии, что каждая буква D_j действует эффективно. Мы будем называть такие D-слова *a-эффективными* (или просто *эффективными*, если понятно, о каком a речь).

6.1.2. Горизонтальные операции L_{i+1} и R_i определяются симметричным образом: они действуют в i-м и $(i+1)$-м столбцах и превращаются в операции D и U при транспонировании массива, т. е.

$$L_i(a) = \big(D_i(a^t)\big)^t \quad \text{и} \quad R_i(a) = \big(U_i(a^t)\big)^t \, .$$

Упражнение 6.1. Переговорите это определение явно: скажите, как установить устойчивое паросочетание между i-тым и $(i+1)$-м столбцом, и какой шар будут перемещать R_i и L_i.

Отметим, что операции D, L сохраняют столбцовый вес, а операции R, L — строчный.

Лемма 6.1 (лемма о коммутировании)
Каждый горизонтальный оператор U_i, R_i перестановочен с каждым вертикальным D_j, L_j.

Доказательство. Мы покажем, что D_j и U_j перестановочны с L_i — остальные случаи разбираются аналогично. Пусть действие операции L_i заключается в перемещении шара $ш$ на одну клетку влево. Достаточно убедиться, что эта процедура не изменяет устойчивого паросочетания между $(j+1)$-ой и j-той строкой в том смысле, что после применения L_i связанными в пары будут в точности те же самые шары, что и до применения. Это очевидно, когда $ш$ лежит вне $(j+1)$-ой и j-той строк. Остаются два случая, представленные на рис. 6◇1.

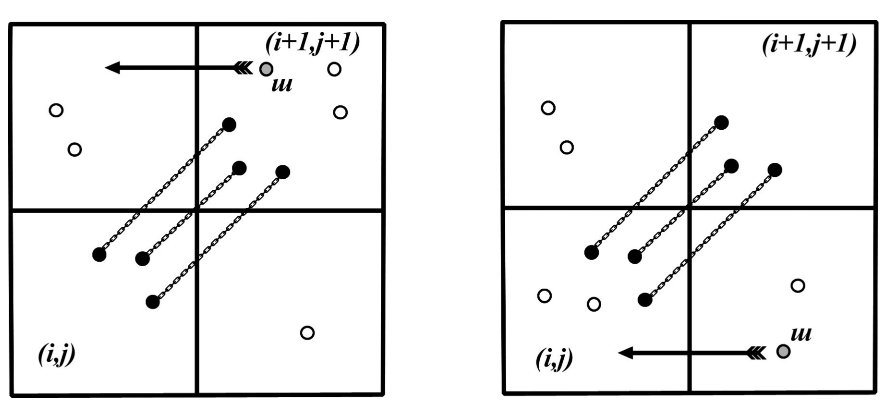


Рис. 6◇1. Горизонтальная операция L_i не меняет устойчивого вертикального паросочетания.

Пусть $ш$ лежит в $(j+1)$-ой строчке, т. е. в клетке $(i+1, j+1)$ (левая картинка на рис. 6◇1). Тогда все шары из клетки (i, j) имеют партнёров в клетке $(i+1, j+1)$, иначе шар $ш$ получил бы себе партнёра в клетке (i, j) в паросочетании между i-тым и $(i+1)$-м столбцом. Поэтому, если в строчном паросочетании у шара $ш$ был партнёр, то он был строго левее клетки (i, j), а значит и останется партнёром после перемещения $ш$ на клетку влево. А если партнёра у $ш$ не было, то он и не появится. Таким образом, при перемещении $ш$ строчное паросочетание не изменяется.

Пусть $ш$ лежит в j-той строчке (правая картинка на рис. 6◇1). Поскольку он является самым верхним свободным шаром в столбцовом паросочетании, все шары из клетки $(i+1, j+1)$ имеют партнёров в клетке (i, j). Но тогда и в строчном паросочетании все шары из $(i+1, j+1)$-той клетки получат партнёров в клетке (i, j). Поэтому перемещение шара $ш$ на клетку влево и в этом случае не изменит ни его статуса, ни партнёра (если таковой был). □

Следствие 6.1
Слово H, составленное из горизонтальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a, когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a вертикальными операциями. Аналогично, слово V, составленное из вертикальных операций, тогда и только тогда эффективно действует на a, когда оно эффективно действует на любой массив, получающийся из a горизонтальными операциями.

Доказательство. Мы докажем первое утверждение, оставив второе читателю. Достаточно проверить, что для любых i, j операция L_i эффективно действует на a тогда и только тогда, когда она эффективно действует на $D_j a$, и только тогда, когда она эффективно действует на $U_j a$.

Если $L_i a = a$, то $L_i D_j a = D_j L_i a = D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a = U_j a$. Наоборот, если $L_i a \neq a$, то i-тая компонента столбцового веса $w^I(L_i a)$ будет строго больше i-той компоненты $w^I(a)$, а так как D_j и U_j не меняют столбцовый вес, то $L_i D_j a = D_j L_i a \neq D_j a$, и $L_i U_j a = U_j L_i a \neq U_j a$. □

6.2. Уплотнение массивов. Будем называть массив D-, L-, R- или U- плотным (т. е. плотным вниз, влево, вправо или вверх), если все элементарные операции соответствующего типа действуют на него тождественно.

Очевидно, что применение к данному массиву достаточно большого числа операций одного из типов в конце концов приведёт к плотному в соответствующую сторону массиву. Такое уплотнение, как правило, можно производить многими разными способами.

В качестве примера, на рис. 6◇2 ниже показаны два пути уплотнения достаточно случайно взятого массива 3×2. Обратите внимание, что результат уплотнения оказался не зависящим от способа уплотнения. Мы докажем это фундаментальное свойство уплотнений в предл. 6.1, сделав в начале одно важное замечание о связи массивов с диаграммами Юнга.

6.2.1. Биплотные массивы и диаграммы Юнга. Из сл. 6.1 вытекает, что при действии вертикальных операций на плотный влево или вправо массив этот массив будет оставаться плотным в ту же сторону. То же самое справедливо для действия горизонтальных операций на массив, который плотен вниз или вверх. Поэтому любой массив можно сделать плотным одновременно в каком-нибудь вертикальном и в каком-нибудь горизонтальном направлении. Мы будем называть такие массивы DL-плотными, DR-плотными, и т. п.

В дальнейшем мы будем заниматься в основном DL-уплотнениями, поэтому условимся называть *биплотными* массивы, которые плотны одновременно *вниз* и *влево*. Очевидно, что все шары в биплотном массиве лежат лишь в клетках главной диагонали $i = j$, причём их количества нестрого убывают с ростом i. Тем самым, столбцовый вес биплотного массива равен строчному и представляет собой диаграмму Юнга $\lambda = w^I(b) = w^J(b)$, т. е. биплотные массивы b взаимно однозначно соответствуют диаграммам Юнга[1]. Диаграмма Юнга, отвечающая биплотному

[1]здесь и далее в этом параграфе мы отождествляем между собою две конечных последовательности неотрицательных целых чисел, получающиеся одна из другой приписыванием справа любого числа нулей; например, мы считаем равными диаграммы $(2, 1, 1)$ и $(2, 1, 1, 0, 0, 0)$

массиву, который получается DU-уплотнением данного массива a, называется *формой* массива a и обозначается $\Phi(a)$. Докажем теперь, что это понятие корректно.

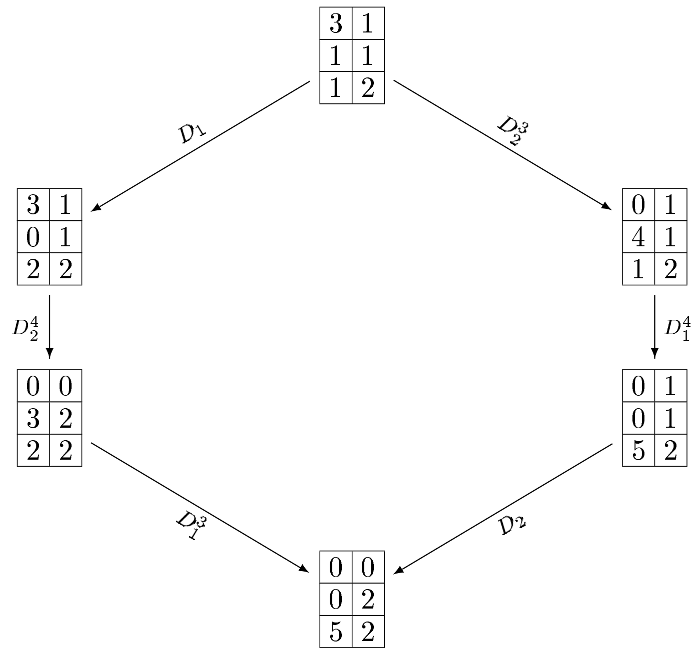


Рис. 6◇2. Два пути уплотнения вниз

Предложение 6.1
Результат D- , L- , R- или U- уплотнения не зависит от выбора последовательности уплотняющих операций.

Доказательство. Мы рассмотрим только случай D-уплотнения. Если массив a плотен влево, то результат его D-уплотнения — это биплотный массив, отвечающий диаграмме Юнга $w^I(a)$. Поскольку $w^I(a)$ не меняется при вертикальных уплотняющих операциях, результат D-уплотнения L-плотного массива не зависит от способа уплотнения. Пусть теперь a произволен. Зафиксируем какое-нибудь слово $L = L_{i_1} L_{i_2} \ldots L_{i_k}$, эффективно уплотняющее a влево до массива $a' = La$. Тогда для любого слова $D = D_{j_1} D_{j_2} \ldots D_{j_k}$, такого что Da плотен вниз, действие L на Da тоже будет эффективным, а массив $LDa = DLa$ будет биплотен (поскольку применение L сохраняет свойство массива Da быть плотным вниз, а применение D сохраняет свойство массива La быть плотным влево). Таким образом, мы можем записать Da как $L^{-1}DLa$. Так как массив DLa, по уже доказанному, не зависит от выбора уплотняющего слова D (ибо DLa есть D-уплотнение L-плотного массива La), массив $Da = L^{-1}DLa$ тоже не зависит от выбора D. □

6.2.2. Плотные массивы и таблицы Юнга. Из любого массива высоты m и ширины n можно изготовить m слов (по одному слову из каждой строки массива), записанных алфавитом $\{1, 2, \ldots, n\}$. Делается это при помощи процедуры, которая называется *строчной развёрткой* массива и состоит в следующем.

Интерпретируем все шарики массива как буквы, равные номеру того столбца, где стоит шарик. После этого пройдём по каждой строке слева направо, выписывая подряд все встречающиеся нам буквы. В результате j-тая строка массива развернётся в слово

$$\underbrace{11\ldots1}_{a(1,j)}\underbrace{22\ldots2}_{a(2,j)}\;\ldots\ldots\ldots\;\underbrace{nn\ldots n}_{a(n,j)}\;.$$

Получающиеся m слов запишем друг под другом в столбик, *сверху вниз*[1], выровняв их по левому

[1] таким образом из нижней строки массива получается верхнее слово и т. д.

краю. Например:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0&0&0&0&1\\\hline 0&0&1&1&0\\\hline 0&4&0&0&0\\\hline 3&1&0&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccccc} 1&1&1&2&5\\ 2&2&2&2\\ 3&4\\ 5 \end{array}, \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&0&3&0&1\\\hline 0&2&1&1&0\\\hline 0&1&0&2&3\\\hline 1&1&2&0&1\\\hline\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{cccccc} 1&1&3&3&3&5\\ 2&2&3&4\\ 2&4&4&5&5&5\\ 1&2&3&3&5 \end{array}.$$

Очевидно, что буквы в каждом слове строчной развёртки нестрого возрастают.

Условие плотности массива вниз (как в левом примере выше) означает, что под каждой буквой «i» в j-том слове (т. е. под шариком, пришедшим из клетки $a(i,j)$) стоит строго большая, чем «i», буква $(j+1)$-го слова (партнёр этого шарика при устойчивом паросочетании между j-той и $(j+1)$-ой строками массива). Следовательно, длины слов строчной развёртки плотного вниз массива нестрого убывают сверху вниз, т. е. образуют диаграмму Юнга, а буквы $\{1, 2, \dots, n\}$ заполняют эту диаграмму нестрого возрастая по строкам и *строго* возрастая по столбцам. Такие заполнения данной диаграммы λ называются *таблицами Юнга* формы λ на алфавите $I = \{1, 2, \dots, n\}$. Мы доказали следующий комбинаторный факт:

Лемма 6.2
Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными вниз массивами размера $m \times n$ и таблицами Юнга на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$, состоящими из $\leqslant m$ строк. □

Упражнение 6.2. Покажите, что массив $a = \big(a(i,j)\big)$ плотен вниз тогда и только тогда, когда для всех $i \in I$ и $j \in J$ выполняются неравенства:

$$a(1,j+1) + a(2,j+1) + \dots + a(i,j+1) \leqslant a(1,j) + a(2,j) + \dots + a(i-1,j)\,,$$

и напишите аналогичные неравенства, эквивалентные L-, R- и U- плотности массива a.

6.2.3. Плотные массивы и тексты Яманучи. L-плотность массива a можно воспринимать как D-плотность транспонированного массива a^t и формулировать в терминах столбцовой развёртки: плотные влево массивы биективно соответствуют таблицам Юнга из $\leqslant n$ строк в алфавите J.

Однако часто оказывается полезным характеризация L-плотности в терминах строчной развёртки. Для этого будем читать слова *строчной* развёртки L-плотного массива *а справа налево* одно за другим, сверху вниз. Условие плотности влево означает тогда, что в любом начальном куске получающейся последовательности букв единиц будет не меньше, чем двоек, двоек — не меньше, чем троек, и т. д. для всех пар последовательных букв «i» и «$(i+1)$» из I. В комбинаторике текст с таким свойством называется *текстом Яманучи*. Например, левая из двух строчных развёрток

$$\begin{array}{ccc} 1\\ 1&2\\ 1&1&2\\ 3&3 \end{array}, \qquad \begin{array}{cccc} 1&1&1&1\\ 2&2&2\\ 2&3&3\\ 1&2 \end{array}$$

является текстом Яманучи, а правая — нет. Итак, нами установлена

Лемма 6.3
Строчная развёртка устанавливает биекцию между плотными влево массивами размера $m \times n$ и текстами Яманучи из $\leqslant m$ слов на алфавите $\{1, 2, \dots, n\}$. □

6.2.4. Послойное произведение. Напомним одну конструкцию из теории множеств. Если заданы два отображения множеств: $X \xrightarrow{\varphi} Z$ и $Y \xrightarrow{\psi} Z$, то дизъюнктное объединение прямых произведений слоёв этих отображений над точками $z \in Z$ обозначается

$$X \underset{Z}{\times} Y \overset{\text{def}}{=} \bigsqcup_{z \in Z} \varphi^{-1}(z) \times \psi^{-1}(z)$$

и называется *послойным* (или *расслоенным*) произведением множеств X и Y над Z.

Упражнение 6.3. Покажите, что коммутативная диаграмма отображений множеств

$$
\begin{tikzcd}
& X \underset{Z}{\times} Y \arrow[dl, "\pi_X"'] \arrow[dr, "\pi_Y"] & \\
X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\
& Z &
\end{tikzcd}
\tag{6-6}
$$

(в которой $\pi_X : (x, y) \mapsto x$ и $\pi_Y : (x, y) \mapsto y$) универсальна в том смысле, что для любого другого коммутативного квадрата

$$
\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\xi"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
X \arrow[dr, "\varphi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\
& Z &
\end{tikzcd}
$$

имеется единственное отображение $M \xrightarrow{\alpha} X \underset{Z}{\times} Y$, такое что $\xi = \pi_X \circ \alpha$, $\eta = \pi_Y \circ \alpha$, и убедитесь, что это свойство определяет множество M и квадрат[2] (6-6) однозначно с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного со всеми стрелками квадрата (6-6).

Теорема 6.1
Множество всех массивов $\mathscr{M}$ представляет собою расслоенное произведение $\mathscr{M} = \mathscr{L} \underset{\mathscr{B}}{\times} \mathscr{D}$ множества плотных влево массивов $\mathscr{L}$ на множество плотных вниз массивов $\mathscr{D}$ над множеством биплотных массивов $\mathscr{B}$, причём диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
& \mathscr{M} \arrow[dl, "L"'] \arrow[dr, "D"] & \\
\mathscr{L} \arrow[dr, "D"'] & & \mathscr{D} \arrow[dl, "L"] \\
& \mathscr{B} &
\end{tikzcd}
$$

(в которой стрелки L и D переводят массив в его уплотнения влево и вниз соответственно) коммутативна и представляет собою универсальный декартов квадрат (6-6).

Доказательство. По предл. 6.1 стрелки L и D корректно определены и перестановочны друг с другом. Мы должны показать, что отображение

$$\mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{L} \underset{\mathscr{B}}{\times} \mathscr{D},$$

сопоставляющее массиву a пару (La, Da) со свойством $DLa = LDa \in \mathscr{B}$ взаимно однозначно.

Инъективность. Пусть массивы a и a' таковы, что $La = La'$ и $Da = Da'$. Выберем для $Da = Da'$ эффективное уплотняющее влево слово Λ. Тогда оно эффективно действует и на a, и на a'. Получаем: $a = \Lambda^{-1} La = \Lambda^{-1} La' = a'$.

Сюрьективность. Для любой пары массивов (a_ℓ, a_d), в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, и $Da_\ell = La_d$, рассмотрим слово Λ, эффективно уплотняющее a_d влево до La_d. Обратное слово Λ^{-1} эффективно действует на La_d, а значит, и на a_ℓ. Массив $a = \Lambda^{-1} a_\ell$ таков, что $La = a_\ell$, и $Da = D\Lambda^{-1} a_\ell = \Lambda^{-1} Da_\ell = \Lambda^{-1} La_d = a_d$. □

[2] он называется *декартовым квадратом*

6.2.5. Пример: графики отображений и стандартные таблицы. График отображения множеств $I \xrightarrow{a} J$ — это массив, в каждом столбце которого имеется ровно один шарик. По теор. 6.1 такие массивы взаимно однозначно параметризуются парами (a_ℓ, a_d) в которой a_ℓ плотен влево, a_d плотен вниз, причём оба этих массива имеют одинаковую форму $Da_\ell = La_d$, и $w^I(a_d) = (1, 1, \dots, 1)$. Каждая такая пара, согласно n° 6.2.2, являет собою следующий набор данных: диаграмма Юнга $\lambda = DLa = LDa$ веса $|\lambda| = n$ (форма массива a), таблица Юнга формы λ на алфавите J (строчная развёртка транспонированного L-уплотнения a_ℓ^t) и таблица Юнга формы λ на алфавите I, в которой каждая буква используется ровно один раз (строчная развёртка D-уплотнения a_d).

Таблицы формы λ заполненные без повторений числами от 1 до $|\lambda|$ называются *стандартными таблицами* формы λ. Число стандартных таблиц формы λ принято обозначать через d_λ, а число всех таблиц формы λ на m-буквенном алфавите — через $d_\lambda(m)$.

Поскольку всего имеется m^n отображений $I \longrightarrow J$, мы получаем соотношение

$$\sum_\lambda d_\lambda \cdot d_\lambda(m) = m^n\,, \tag{6-7}$$

где суммирование идёт по всем n-клеточным диаграммам Юнга и числа $d_\lambda(m)$ отличны от нуля только для диаграмм из $\leqslant m$ строк.

Если положить $\#J = \#I = n$, и ограничиться только биективными отображениями $I \xrightarrow{\sim} J$, то эта же конструкция даст биекцию между $n!$ элементами симметрической группы S_n и парами стандартных таблиц одинаковой формы веса n, т. е. равенство

$$\sum_\lambda d_\lambda^2 = n!\,, \tag{6-8}$$

где сумма идёт о всем n-клеточным диаграммам. Эта последняя биекция взаимно однозначно переводит инволютивные перестановки[1] $\sigma \in S_n$ в самосопряжённые массивы $a = a^t$, которым в теореме о биекции отвечают пары одинаковых стандартных таблиц. Поэтому

$$\sum_\lambda d_\lambda = \#\{\sigma \in S_n \mid \sigma^2 = 1\}\,. \tag{6-9}$$

6.3. Действие симметрической группы на DU-множествах. Будем называть *DU-множеством* всякое множество массивов, которое переводится в себя вертикальными операциями D и U. Гомоморфизмы DU-множеств — это отображения, перестановочные с действием операций D и U.

DU-множество, на котором операции D и U действуют транзитивно, будем называть *DU-орбитой*. DU-орбиты взаимно однозначно соответствуют плотным вниз массивам. Орбита O такого массива a_d состоит из всевозможных массивов, которые можно получить из a_d эффективными U-словами. Мы будем называть a_d *нижним концом* орбиты O.

Лемма 6.4
Объединения, пересечения и разности DU-множеств также являются DU-множествами. В частности, всякое DU-множество распадается в дизъюнктное объединение DU-орбит.

Доказательство. Не очевидно, разве что, утверждение про разности. Пусть A' и A'' DU-инвариантны и $a' \in A' \smallsetminus A''$. Если $D_j a' \in A''$, то D_j действует эффективно, и тогда $a' = U_j D_j a'$ тоже лежит в A''. □

[1] т. е. такие, что $\sigma^2 = 1$

6.3.1. Стандартные орбиты. DU-орбиты O_λ биплотных массивов λ называются *стандартными*. Например, при $m = 3$ стандартная орбита $O_{(2,1)}$, отвечающая диаграмме – таблице – массиву

$$\begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array} \quad - \quad \begin{array}{|c|c|}\hline 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 \\ \hline 2 & 0 \\ \hline\end{array}$$

состоит из восьми массивов, представленных на рис. 6◇3.

Из теоремы о биекции вытекает, что уплотнение влево задаёт изоморфизм любой DU-орбиты O со стандартной орбитой O_λ, нижний конец которой является биуплотнением нижнего конца орбиты O. Мы будем называть λ *типом* орбиты O. Количество орбит типа λ в данном DU-множестве M равно количеству плотных вниз массивов строчного веса λ, имеющихся в M.

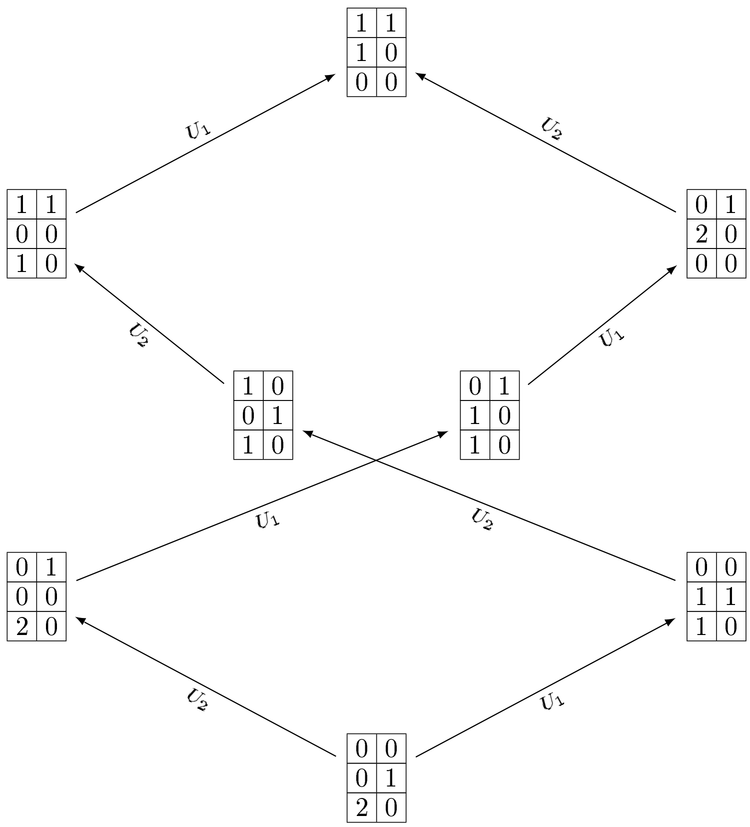


Рис. 6◇3. Стандартная DU-орбита $O_{(2,1)}$.

6.3.2. Действие симметрической группы $S_m = \mathrm{Aut}\,(J)$. На любом DU-множестве массивов M имеется действие элементарных транспозиций $\sigma_j = (j, j+1)$, порождающих симметрическую группу S_m, переставляющую строки массива. Оно определяется следующим образом.

Пусть в j-той и $(j+1)$-ой строках после установления между ними устойчивого паросочетания образовалось, соответственно, s_j и s_{j+1} свободных шаров. Положим

$$\sigma_j = D_j^{s_{j+1}-s_j} = U_j^{s_j - s_{j+1}} \,. \tag{6-10}$$

Подробнее эту процедуру можно описать так. Свернём массив в вертикальный цилиндр, приклеив правую границу n-того столбца к левой границе первого, и продолжим устойчивое паросочетание по кругу, т. е. назначим в пару самому правому нижнему свободному шару самый левый свободный верхний и т. д. В результате останется ровно $|s_{j+1} - s_j|$ свободных шаров и все они будут располагаться или только в верхней или только в нижней строке — там где их вначале было больше. Операция σ_j просто передвигает их по вертикали в другую строку (или ничего не делает, если $s_j = s_{j+1}$). В частности, действие σ_j на строчный вес w^J состоит в перестановке j-той и $(j+1)$-ой координаты.

Из предыдущего описания видно, что $\sigma_j^2 = \mathrm{Id}$, а также, что σ_j *коммутирует с циклическими перестановками столбцов*. Очевидно также, что σ_j перестановочна с горизонтальными операциями R, L и со всеми σ_k с $|k-j| \geqslant 2$.

Таким образом, для того чтобы действие σ_j непротиворечиво продолжалось на всю симметрическую группу S_m остаётся проверить выполнение *уравнения треугольника*

$$\sigma_j \sigma_{j+1} \sigma_j = \sigma_{j+1} \sigma_j \sigma_{j+1}\,.$$

Это достаточно сделать для трёхстрочного массива. Пользуясь уплотнениями влево L и циклическими перестановками столбцов C мы редуцируем любой трёхстрочный массив в одностолбцовому:

$$\begin{array}{|c|}\hline * * * \\ \hline * * * \\ \hline * * * \\ \hline \end{array} \xmapsto{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline a & b & c \\ \hline d & e & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xmapsto{C} \begin{array}{|c|c|c|}\hline b & c & a \\ \hline e & 0 & d \\ \hline 0 & 0 & f \\ \hline \end{array} \xmapsto{L} \begin{array}{|c|c|c|}\hline g & h & 0 \\ \hline k & 0 & 0 \\ \hline f & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \xmapsto{C} \begin{array}{|c|c|}\hline h & g \\ \hline 0 & k \\ \hline 0 & f \\ \hline \end{array} \xmapsto{L} \begin{array}{|c|c|}\hline \ell & 0 \\ \hline k & 0 \\ \hline f & 0 \\ \hline \end{array}$$

для которого действие σ_j просто переставляет строки, и потому удовлетворяет соотношению треугольника.

6.4. Полиномы Шура. Будем интерпретировать все шарики j-той строки как переменные x_j и сопоставим каждому массиву a моном, получающийся перемножением всех шариков массива:

$$x^a = x_1^{w_1^J(a)} x_2^{w_2^J(a)} \cdots x_m^{w_m^J(a)}$$

(показатель у x_j равен j-той координате строчного веса $w^J(A)$). Суммируя мономы x^a по всем массивам из произвольного DU-множества M, мы получаем многочлен

$$s_M(x) = \sum_{a \in M} x^a \in \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_m]\,,$$

который называется *многочленом Шура* DU-множества M. Поскольку симметрическая группа S_m переставляет координаты весового вектора, она действует на мономы x^a перестановками переменных. Таким образом, все многочлены Шура являются симметрическими.

Поскольку каждое DU-множество M является объединением непересекающихся орбит, а всякая орбита изоморфна стандартной орбите O_λ, произвольный полином Шура является линейной комбинацией (с неотрицательными целыми коэффициентами) *стандартных* многочленов Шура $s_\lambda(x)$, отвечающих биплотным массивам (диаграммам Юнга) λ:

$$s_M(x) = \sum_{\lambda \in \varPhi(M)} c_M^\lambda \cdot s_\lambda(x)\,. \tag{6-11}$$

Суммирование в этой формуле происходит по всем формам λ массивов из M, и коэффициент c_M^λ равен числу DU-орбит, изоморфных O_λ, т. е. количеству всех плотных вниз массивов J-веса λ в M.

Согласно n° 6.2.2, элементы стандартной орбиты O_λ суть всевозможные L-плотные массивы формы λ, и столбцовая развёртка устанавливает биекцию между такими массивами и таблицами Юнга формы λ в алфавите $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Таким образом, стандартный полином Шура имеет вид

$$s_\lambda(x) = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x^\eta = \sum_\eta K_{\lambda,\eta} \cdot x_1^{\eta_1} x_2^{\eta_2} \,\cdots\, x_m^{\eta_m}\,, \tag{6-12}$$

где $\eta \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}^m$ пробегает m-мерные целочисленные векторы с неотрицательными координатами, а коэффициент $K_{\lambda,\eta}$ равен числу таблиц формы λ, заполненных η_1 единицами, η_2 двойками и т. д. Мы будем говорить, что такая таблица имеет *состав* η.

Например, при $m = 3$ из представленной на рис. 6◇3 схемы получаем

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2\,x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2\,.$$

Число $K_{\lambda,\eta}$ таблиц формы λ и состава μ называется *числом Костки*. Отметим, что $K_{\lambda,(1^{|\lambda|})} = d_\lambda$ равно числу стандартных таблиц формы λ, все $K_{\lambda,\lambda} = 1$, и $K_{\lambda,\eta} \neq 0$ только когда при каждом $j = 1, 2, 3, \dots$ выполняются неравенства

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_j \geqslant \eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_j \quad \forall j\,. \tag{6-13}$$

В этой ситуации говорят, что диаграмма λ *доминирует* диаграмму μ и пишут $\lambda \trianglerighteq \mu$.

Упражнение 6.4. Покажите, что отношение доминирования задаёт на множестве диаграмм Юнга заданного веса n частичный порядок, полный при $n \leqslant 5$, и приведите пример двух несравнимых между собою диаграмм Юнга веса 6.

Таким образом, стандартные многочлены Шура $s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более, чем m строк, выражаются через базисные мономиальные симметрические многочлены m_λ при помощи обратимой над $\mathbb{Z}$ нижней унитреугольной матрицы:

$$s_\lambda = \sum_{\mu \trianglelefteq \lambda} K_{\lambda,\mu} \cdot m_\mu\,. \tag{6-14}$$

Тем самым, многочлены s_λ образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

6.4.1. Пример: полные и элементарные симметрические многочлены. Многочлен Шура $s_{(k)}(x)$, отвечающий DU-орбите одностолбцового массива, т. е. диаграммы-строки

$$\lambda = (k,\,0,\,\cdots,\,0) = \underbrace{\square\square\cdots\,\square\square}_{k}\,,$$

представляет собой *полный симметрический многочлен* $h_k(x)$ — сумму всех мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$, поскольку для любого содержания η веса $|\eta| = k$ имеется ровно одна однострочная таблица, в которой все координаты выстроены монотонно[1]. Симметричным образом, $s_{(1^k)}$, отвечающий DU-орбите диаграммы-столбца

$$1^k = (1,\,1,\,\cdots,\,1) = \left.\begin{matrix}\square\\ \vdots \\ \square\end{matrix}\right\}k$$

это *элементарный симметрический многочлен* $e_k(x)$, т. е. сумма всех линейных по каждой переменной мономов общей степени k от $x_1, x_2, \dots, x_m$. Причина та же, только теперь номера переменных в таблице-столбце должны строго возрастать.

6.4.2. Пример: тождества Коши и Шура. Проинтерпретируем каждый шарик в клетке (i,j) массива a как билинейный моном $x_i y_j$ от двух наборов переменных $x = x^I = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = y^J = (y_1, y_2, \dots, y_m)$. Перемножая вместе все шарики массива a, мы получим (в обозначениях n° 6.4) моном $x^{a^t} y^a$. По теореме о биекции из теор. 6.1 сумма таких мономов по всем массивам a фиксированной формы $\lambda = \Phi(a)$ равна произведению многочленов Шура $s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y)$, и значит сумма мономов $x^{a^t} y^a$ по вообще всем массивам a формата $I \times J$ равна сумме таких произведений по всем диаграммам Юнга λ.

С другой стороны, сумма всех мономов $x^{a^t} y^a$ по всем массивам a получается при раскрытии скобок в произведении бесконечных геометрических прогрессий

$$\prod_{\substack{i\in I\\ j\in J}} \left(1 + x_i y_j + (x_i y_j)^2 + (x_i y_j)^3 + \cdots\right)$$

[1]эквивалентно: DU-орбита одностолбцового массива веса k образована всеми возможными расположениями k шариков по m ящикам

(выбирая из (i,j)-того сомножителя слагаемое $(x_i y_j)^{a(i,j)}$ мы получаем в точности моном $x^{a^t} y^a$, отвечающий массиву a). Таким образом, мы приходим к *тождеству Коши*:

$$\sum_\lambda s_\lambda(x) \cdot s_\lambda(y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} \tag{6-15}$$

Если взять $I = J$, ограничиться только симметричными массивами $a = a^t$, положить $x = y = \xi$ и извлечь из каждого a-монома корень

$$\xi^a = \sqrt{\xi^{a^t} \xi^a} = \sqrt{x^{a^t} y^a}|_{x=y=\xi}\,,$$

то, суммируя по всем симметричным массивам a заданной формы λ, мы получим $s_\lambda(\xi)$, а суммируя по вообще всем симметричным массивам a — сумму $\sum\limits_\lambda s_\lambda(\xi)$. Тот же результат получится при раскрытии скобок в произведении прогрессий

$$\prod_k \left(1 + \xi_k + (\xi_k)^2 + (\xi_k)^3 + \cdots\right) \cdot \prod_{i<j} \left(1 + \xi_i \xi_j + (\xi_i \xi_j)^2 + (\xi_i \xi_j)^3 + \cdots\right).$$

Мы получаем *тождество Шура*:

$$\sum_\lambda s_\lambda(\xi) = \prod_i \frac{1}{1 - \xi_i} \cdot \prod_{i<j} \frac{1}{1 - \xi_i \xi_j}\,. \tag{6-16}$$

6.5. Правило Литтлвуда – Ричардсона. Произведение полиномов Шура

$$s_M(x) \cdot s_N(x)$$

DU-множеств M и N является полиномом Шура для DU-множества, состоящего из всевозможных массивов вида ab размера $(2n) \times m$, получающихся приписыванием какого-нибудь массива $b \in N$ справа к какому-нибудь массиву[1] $a \in M$. Множество таких массивов естественно обозначить через $M \otimes N$ и называть *тензорным произведением* DU-множеств M и N. Итак,

$$s_M(x) \cdot s_N(x) = \Big(\sum_{a \in M} x^a\Big) \cdot \Big(\sum_{b \in N} x^b\Big) = \sum_{\substack{a \in M \\ b \in N}} x^{ab} = \sum_{c \in M \otimes N} x^c\,.$$

Разложение произведения $s_\lambda s_\mu$ стандартных полиномов Шура по базису s_ν даёт

Теорема 6.2 (правило Литтлвуда – Ричардсона)
$s_\lambda \cdot s_\mu = \sum\limits_\nu c^\nu_{\lambda\mu} \cdot s_\nu$, где суммирование происходит по всем диаграммам ν, получающимся добавлением $|\mu|$ клеток к диаграмме λ, а коэффициент $c^\nu_{\lambda\mu}$ равен количеству заполнений этих дописанных клеток μ_1 единицами, μ_2 двойками, μ_3 тройками и т. д., так что вдоль строк «косой диаграммы» $\nu \smallsetminus \lambda$ числа возрастают нестрого, а вдоль столбцов — строго (как в таблице Юнга), и одновременно слово, получающееся при прочтении этой «косой диаграммы» строку за строкой справа налево сверху вниз, содержит в каждом своём начальном куске единиц не меньше, чем двоек, двоек не меньше, чем троек и т. д. (как в n° 6.2.3).

Доказательство. Мы должны подсчитать в DU-множестве $O_\lambda \otimes O_\mu$ количество DU-орбит, которые уплотняются влево до стандартной орбиты O_ν. Пусть массив ab лежит в такой орбите. Поскольку массивы a, b получены из биплотных массивов λ, μ вертикальными операторами, оба они плотны влево и имеют I-веса λ и μ соответственно. Заметим, что действие вертикальной

[1] при этом вертикальный J-алфавит не меняется, а горизонтальный I-алфавит заменяется дизъюнктным объединением I-алфавитов массивов a и b

уплотняющей операции D_j на «толстый» массив ab состоит либо в её действии отдельно на[2] b , либо в её действии отдельно на[1] a. Поэтому при уплотнении вниз «толстого» массива ab мы получим массив вида $a'b'$, в котором a' плотен вниз, и оба массива a', b' по прежнему плотны влево и имеют I-веса λ, μ. Таким образом, a' биплотен формы λ. Если форма массива $a'b' = \lambda b'$ равна ν, то строки горизонтальной развёртки массива b' — это выровненные по левому краю строки «косой таблицы» $\nu \smallsetminus \lambda$, заполненные именно так, как требует правило Литтлвуда – Ричардсона: первое, «табличное», ограничение выражает плотность вниз «толстого» массива ab, а второе, «словестное», ограничение выражает, согласно n° 6.2.3, плотность влево массива b'. □

Упражнение 6.5. Пользуясь правилом Литтлвуда – Ричардсона вычислите в Λ_3 произведения $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$ и $s_{2,1}^2$. В частности, убедитесь непосредственно, что в первом случае «честное» и «халявное[1]» вычисления приводят к одному и тому же результату.

Упражнение 6.6 (формулы Пьери). Выведите из правила Литтлвуда-Ричардсона *формулы Пьери* для умножения полиномов Шура на элементарные и полные симметрические многочлены:

$$s_\lambda \cdot e_k = s_\lambda \cdot s_{(1^k)} = \sum_\mu s_\mu \tag{6-17}$$

$$s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)} = \sum_\nu s_\nu \tag{6-18}$$

где μ и ν пробегают все диаграммы, которые можно получить приписыванием k новых клеток к диаграмме λ так, чтобы никакие две новые клетки не попали в одну строку μ и в один столбец ν.

6.5.1. Тождество Якоби – Труди. Из формулы Пьери (6-18) и формулы Пьери из сл. 5.6 на стр. 41 вытекает, что детерминантные полиномы Шура $\Delta_{\delta+\lambda}$ из предыдущего параграфа и комбинаторные полиномы Шура s_λ стандартных DU-орбит — это одни и те же полиномы.

В самом деле, формулы Пьери позволяют однозначно выразить все многочлены Шура через многочлены h_k. Например, согласно (6-18)

$$\begin{aligned} s_{(2,2,1)} &= s_{(2,2)}h_1 - s_{(3,2)} \\ s_{(3,2)} &= s_{(3)}h_2 - s_{(5)} - s_{(4,1)} = h_3h_2 - h_5 - s_{(4,1)} \\ s_{(2,2)} &= s_{(2)}h_2 - s_{(3,1)} - s_{(4)} = h_2^2 - h_4 - s_{(3,1)} \\ s_{(4,1)} &= s_{(4)}h_1 - s_{(5)} = h_4h_1 - h_5 \\ s_{(3,1)} &= s_{(3)}h_1 - s_{(4)} = h_3h_1 - h_4 \end{aligned}$$

откуда[2] $s_{(2,2,1)} = -h_3h_2 + h_4h_1 + h_1(h_2^2 - h_1h_3)$. В общем случае, оставляя в правой части формулы (6-18) диаграмму с самой длинной нижней строкой среди всех диаграмм с наибольшим количеством строк, мы выражаем её через h_k (где k равно длине этой нижней строки) и диаграммы, имеющие то же число строк, но более короткую нижнюю строчку, или строго меньшее число строк. Далее используем убывающую индукцию по количеству строк диаграммы Юнга и длине её нижней строки.

Совпадение детерминантного и комбинаторного описания полиномов Шура называется *тождеством Якоби – Труди*.

6.5.2. Выражение e_λ и h_λ через s_λ. Напомним, что для диаграммы Юнга μ мы обозначаем через m_i количество строк длины i в этой диаграмме и полагаем

$$e_\mu = e_{\mu_1}e_{\mu_2}\cdots e_{\mu_r} = e_1^{m_1}e_2^{m_2}\cdots e_n^{m_n} \tag{6-19}$$

$$h_\mu = h_{\mu_1}h_{\mu_2}\cdots h_{\mu_r} = h_1^{m_1}h_2^{m_2}\cdots h_n^{m_n} \,. \tag{6-20}$$

[2] если самый правый свободный шар при паросочетании внутри «толстого» массива ab лежит в b, то он подавно будет самым правым свободным шаром и для паросочетания, установленного отдельно внутри b

[1] если в b нет свободных шаров при паросочетании внутри «толстого» массива ab

[1] т. е. применяющее правило теор. 6.2 не к $s_{(1)} \cdot s_{(1,1)}$, а к $s_{(1,1)} \cdot s_{(1)}$, что не всё равно

[2] читателю рекомендуется проверить этот результат по формуле Джамбелли (5-25)

Многочлены (6-19) и (6-20) называются, соответственно, *элементарными* и *полными* симметрическими многочленами. Отметим, что при $k \in \mathbb{N}$

$$e_k(x) = s_{(1^k)}(x_1, x_2, \dots, x_m) \quad \text{и} \quad h_k(x) = s_{(k)}(x_1, x_2, \dots, x_m)\,.$$

Произвольный многочлен $h_\eta = s_{(\eta_1)} s_{(\eta_2)} \cdots s_{(\eta_r)}$ представляет собою полином Шура DU-множества $O_{(\eta_1)} \otimes O_{(\eta_2)} \otimes \cdots \otimes O_{(\eta_r)}$. Орбиты формы ν в этом множестве биективно соответствуют своим нижним концам, которые в свою очередь, взаимно однозначно описываются таблицами формы ν и содержания η. Тем самым,

$$h_\eta = \sum_\nu K_{\nu,\eta} \cdot s_\nu\,. \tag{6-21}$$

Произвольный многочлен $e_\eta = s_{(1^{\eta_1})} s_{(1^{\eta_2})} \cdots s_{(1^{\eta_r})}$ представляет собою многочлен Шура DU-множества $O_{(1^{\eta_1})} \otimes O_{(1^{\eta_2})} \otimes \cdots \otimes O_{(1^{\eta_r})}$, каждый массив в котором имеет $|\eta|$ столбцов, разбитых на вертикальные подмассивы $a_1 a_2 \dots a_r$ ширины $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_r$, причём в каждом столбце находится ровно один шар, и j-номера этих шаров строго возрастают внутри каждого вертикального подмассива a_i. При уплотнении вниз последнее свойство сохранится, и в результате такого уплотнения мы получим массив $a'_1 a'_2 \dots a'_r$ в котором шары каждого подмассива a'_i располагаются в разных строках, номера которых строго возрастают слева направо. Тем самым, каждый подмассив a'_i внесёт не более одного шара в каждую компоненту J-веса. Если суммарный J-вес при этом получится ν, то записывая в каждую строку диаграммы ν последовательно номера i тех подмассивов a'_i, которые дают вклад в эту компоненту J-веса, мы получим таблицу содержания η и формы ν^t, *сопряжённой*[1] к форме ν: в силу вышесказанного номера будут строго возрастать по строкам диаграммы ν, а поскольку массив плотен вниз, они также должны не строго возрастать по столбцам; кроме того, по построению, каждый номер i будет представлен ровно в η_i различных строчках. Таким образом,

$$e_\eta = \sum_\nu K_{\nu^t,\eta} \cdot s_\nu\,. \tag{6-22}$$

Следствие 6.2

Инволюция ω из предл. 5.3, переводящая e_k и h_k друг в друга, действует на полиномы Шура по правилу $\omega(s_\lambda) = s_{\lambda^t}$, т. е. переводит друг в друга многочлены, отвечающие транспонированным диаграмм Юнга.

Доказательство. Так как многочлены s_λ образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций, отображение $s_\lambda \mapsto s_{\lambda^t}$ однозначно задаёт на модуле симметрических функций $\mathbb{Z}$-линейную инволюцию. Из формул (6-21) и (6-22) следует, что эта инволюция переводит e_k в h_k и наоборот, т. е. совпадает с ω. □

Следствие 6.3 (вторая формула Джамбелли)

$$s_{\lambda^t} = \det \begin{pmatrix} e_{\lambda_1} & e_{\lambda_1+1} & \ddots & e_{\lambda_1+n-1} \\ e_{\lambda_2-1} & e_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & e_{\lambda_{n-1}+1} \\ e_{\lambda_n-n+1} & \ddots & e_{\lambda_n-1} & e_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{6-23}$$

(по главной диагонали стоят $e_{\lambda_1}, e_{\lambda_2}, \dots, e_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у e с каждым шагом увеличиваются на единицу). □

Доказательство. Применяем инволюцию ω к формуле Джамбелли (5-25). □

[1] или *транспонированной*, т. е. симметрично отражённой относительно главной диагонали

6.6. Скалярное произведение Введём на $\mathbb{Z}$-модуле симметрических функций Λ скалярное произведение $\langle *, * \rangle$, для которого базис из полиномов Шура s_λ является ортонормальным. Из формул (6-21) и (6-14)

$$h_\lambda = \sum_{\mu \trianglerighteq \lambda} K_{\mu,\lambda} \cdot s_\mu \,, \quad s_\mu = \sum_{\lambda \trianglerighteq \mu} K_{\mu,\lambda} \cdot m_\lambda$$

вытекает, что $\langle h_\lambda , s_\mu \rangle = K_{\mu,\lambda} = \langle m^*_\lambda , s_\mu \rangle$, где m^*_λ — базис, двойственный к m_λ. Таким образом, $m^*_\lambda = h_\lambda$, т. е. базисы h_λ и m_λ двойственны друг другу:

$$\langle h_\lambda , m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} \,. \tag{6-24}$$

Из сл. 6.2 вытекает, что инволюция ω является ортогональным оператором.

Предложение 6.2
Многочлены Ньютона p_λ составляют ортогональный базис пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами и имеют скалярные квадраты $\langle p_\lambda , p_\lambda \rangle = z_\lambda$, где[1] $z_\lambda = \prod\limits_k (m_k! \cdot k^{m_k})$.

Доказательство. Выразим произведение геометрических прогрессий в правой части тождества Коши (6-15) через функции Ньютона от наборов переменных x и y:

$$\begin{aligned}
\sum_\lambda s_\lambda(x) s_\lambda(y) &= \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \prod_j H(y_j) = \prod_j \exp\left(\int_0^{y_j} P(t)\, dt \right) = \\
&= \exp\left(\sum_j \sum_k \frac{1}{k}\, p_k(x) y_j^k \right) = \exp\left(\sum_k \frac{p_k(x) p_k(y)}{k} \right) = \prod_k \exp\left(\frac{p_k(x) p_k(y)}{k} \right) = \\
&= \prod_k \sum_{\ell \geqslant 0} \frac{1}{\ell! \cdot k^\ell} \, \left(p_k(x) p_k(y)\right)^\ell = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda}\, p_\lambda(x) p_\lambda(y)
\end{aligned}$$

(переход в последнем равенстве тот же, что и в доказательстве равенства 5-21 на стр. 38). Если обозначить через $C_{\lambda\mu} = \langle s_\lambda , p_\mu \rangle$ коэффициенты разложений Ньютоновских полиномов по базису из полиномов Шура, так что $p_\mu = \sum\limits_\lambda C_{\lambda\mu} s_\lambda$, то подставляя эти разложения в правую часть полученного выше равенства и приравнивая коэффициенты при $s_\lambda(x) s_\eta(y)$ в левой и правой части, получаем соотношения

$$\sum_\nu C_{\nu\lambda} C_{\nu\eta} = \begin{cases} z_\lambda & \text{при } \eta = \lambda \\ 0 & \text{при } \eta \neq \lambda \end{cases}$$

т. е. матрица Грама $\left(\langle p_\lambda , p_\mu \rangle \right) = C^t \cdot C$ диагональна с диагональными элементами z_λ. □

[1] ср. с формулами (5-19) на стр. 38