§5. Симметрические функции

5.1. Симметрические и кососимметрические многочлены. Симметрическая группа S_n действует на кольце многочленов $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ перестановками номеров переменных:

$$gf(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{g(1)}, x_{g(2)}, \dots, x_{g(n)}) \qquad \forall\, g \in S_n\,. \tag{5-1}$$

Будем называть многочлен $f \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ *симметрическим*, если $gf = f$ для всех $g \in S^n$, и *кососимметрическим*, если $g(t) = \operatorname{sgn}(g) \cdot t$ для всех $g \in S^n$. Симметрические многочлены образуют в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ подкольцо, а кососимметрические многочлены — модуль над этим кольцом (произведение симметрического многочлена на кососимметрический — это кососимметрический многочлен).

Иногда удобно смотреть на симметрические и кососимметрические многочлены как на симметрические и кососимметрические тензоры в n-той тензорной степени кольца многочленов от одной переменной. Имеется изоморфизм $\mathbb{Z}$-модулей (см. n° 1.3.1)

$$\varkappa : \mathbb{Z}[t]^{\otimes n} \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]\,, \tag{5-2}$$

переводящий базисный (некоммутативный) тензорный моном $t^{m_1} \otimes t^{m_2} \otimes \cdots \otimes t^{m_n} \in \mathbb{Z}[t]$ в базисный моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (номера тензорных сомножителей слева соответствуют номерам переменных справа). Изоморфизм $\varkappa$ перестановочен с действием симметрической группы и отождествляет симметрические и кососимметрические тензоры слева с симметрическими и кососимметрическими многочленами справа. Умножению многочленов в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ отвечает покомпонентное умножение тензорных сомножителей в $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$:

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n) \cdot (g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n) = (f_1 g_1) \otimes (f_2 g_2) \otimes \cdots \otimes (f_n g_n)$$

Упражнение 5.1. Проверьте, что так определённое умножение наделяет $\mathbb{Z}[t]^{\otimes n}$ структурой коммутативного кольца с единицей $1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1$.

Изоморфизм $\varkappa$ переводит стандартные базисы $\mathbb{Z}$-модулей $\operatorname{Sym}^n(\mathbb{Z}[t])$ и $\operatorname{Skew}^n(\mathbb{Z}[t])$, описанные в (3-1) и (3-2), в стандартные базисы $\mathbb{Z}$-модулей симметрических и кососимметрических многочленов, которые называются *мономиальным* и *детерминантным*.

5.1.1. Мономиальный базис модуля симметрических многочленов состоит из *мономиальных симметрических многочленов*

$$m_\lambda = (\text{сумма всех мономов из } S_n\text{-орбиты монома } x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n})\,, \tag{5-3}$$

где $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ пробегает диаграммы Юнга из $\leqslant n$ строк. Поскольку любой симметрический многочлен вместе с каждым своим мономом содержит (с одинаковыми коэффициентами) все мономы из его S_n-орбиты, и каждая S_n-орбита однозначно определяется своим лексикографически старшим мономом, показатели которого слева направо не убывают, любой симметрический многочлен однозначно представляется в виде целочисленной линейной комбинации многочленов m_λ. Прообразом многочлена m_λ при изоморфизме (5-2) является стандартный базисный симметрический тензор (3-1), равный сумме всех различных тензорных произведений из $m_0(\lambda)$ сомножителей $t^0 = 1$, $m_1(\lambda)$ сомножителей t^1, $m_2(\lambda)$ сомножителей t^2 и т. д., где $m_i(\lambda)$ равно числу строк длины i в диаграмме λ.

5.1.2. Детерминантный базис модуля кососимметрических многочленов состоит из альтернированных S_n-орбит

$$\Delta_\nu = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n}\,. \tag{5-4}$$

Прообразом такого многочлена при изоморфизме (5-2) является стандартный базисный кососимметрические тензор (3-2). Поскольку в кососимметрическом многочлене нет мономов, содержащих одинаковые степени разных переменных[1], индекс ν в (5-4) пробегает множество диаграмм

[1] при транспозиции любых двух переменных многочлен должен менять знак

Юнга с неповторяющимися длинами строк $\nu_1 > \nu_2 > \ldots > \nu_n$. Такая диаграмма ν всегда содержит в себе минимальную треугольную диаграмму из n строк разной длины

$$\delta = ((n-1),\,(n-2),\,\ldots,\,1,\,0)$$

Разность $\lambda = \nu - \delta = ((\nu_1 - n + 1),\,(\nu_2 - n + 2),\,\ldots,\,(\nu_{n-1} - 1),\,\nu_n)$ имеет $\lambda_i = \nu_i - n + i$ и представляет собою произвольную диаграмму Юнга из $\leqslant n$ строк (без ограничений на длины этих строк). Иногда бывает удобно нумеровать базис (5-4) именно такими диаграммами λ, и в этих случаях мы будем писать $\Delta_{\lambda+\delta}$ вместо Δ_ν.

Легко видеть, что многочлен (5-4) представляет собою определитель[1]

$$\Delta_\nu = \det(x_j^{\nu_i}) = \det\begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix} \tag{5-5}$$

Упражнение 5.2. Убедитесь в этом прямым раскрытием правой части (5-5).

В частности, при $\nu = \delta$ получаем определитель Вандермонда

$$\Delta_\delta = \det(x_j^{n-i}) = \det\begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_i - x_j)\,. \tag{5-6}$$

5.1.3. Базис Шура. Поскольку любой кососимметрический многочлен f обращается в нуль при подстановке $x_i = x_j$, он делится в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ на $(x_i - x_j)$, а так как каждая из разностей $(x_i - x_j)$ неприводима, f делится на их произведение $\Delta_\delta = \prod\limits_{i<j}(x_i - x_j)$, причём частное от этого деления $f/\Delta_\delta \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ является симметрическим многочленом. Мы получаем

Предложение 5.1

Умножение на определитель Вандермонда Δ_δ задаёт $\mathbb{Z}$-линейный изоморфизм $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов с $\mathbb{Z}$-модулем кососимметрических многочленов. Этот изоморфизм также является изоморфизмом модулей над кольцом симметрических многочленов. □

Следствие 5.1

Многочлены[1] $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$, где λ пробегает все диаграммы Юнга из не более n строк, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических многочленов.

5.2. Элементарные симметрические многочлены. Многочлен $E(t)$ с коэффициентами в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, задаваемый формулой

$$E(t) = \prod_i (1 + x_i t) = \sum_{k=0}^{n} e_k(x) \cdot t^k \tag{5-7}$$

имеет в качестве коэффициентов *элементарные симметрические многочлены* $e_0 = 1$ и

$$e_k(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} \tag{5-8}$$

[1] здесь и далее запись $(f(i,j))$, где $f(i,j)$ некоторая функция от i, j, будет означать матрицу, в i-той строке и j-том столбце которой стоит результат применения функции f к данным значениям i и j

[1] многочлены $s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta$ называются *многочленами Шура*

(сумма всех произведений из k различных переменных, где $k \geqslant 1$). Эти же многочлены возникают в *формулах Виета*: если $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ являются корнями приведённого многочлена

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n = \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)\,, \tag{5-9}$$

то $a_i = (-1)^i e_i(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

Для любого набора неотрицательных целых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ положим по определению

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_m} = \prod_{k=1}^{m} e_{\lambda_k}\,.$$

Если λ — диаграмма Юнга, то лексикографически старшим мономом многочлена e_λ будет $x_1^{\lambda_1^t} x_2^{\lambda_2^t} \ldots x_n^{\lambda_n^t}$, возникающий при перемножении монома $x_1 \ldots x_{\lambda_1}$ из e_{λ_1}, монома $x_1 \ldots x_{\lambda_2}$ из e_{λ_2} и т. д. вплоть до $x_1 \ldots x_{\lambda_m}$ из e_{λ_m} — это можно представлять себе как результат перемножения букв $x_1, x_2, \ldots, x_n$, расставленных в клетки диаграммы λ так, что x_1 стоит во всех клетках первого столбца, x_2 — во всех клетках второго и т. д. В результате показатель у переменной x_i будет равен длине i-того столбца диаграммы λ, т. е. длине i-той строки транспонированной диаграммы λ^t. Таким образом, разложение многочлена e_λ по базису m_λ из мономиальных симметрических многочленов (5-3) имеет вид:

$$e_\lambda = m_{\lambda^t} + (\text{лексикографически младшие члены}) \tag{5-10}$$

Предложение 5.2
Многочлены $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \cdots e_{\lambda_m}$, где λ пробегает диаграммы Юнга, содержащие не более n столбцов, образуют базис $\mathbb{Z}$-модуля симметрических функций.

Доказательство. Многочлены e_λ нумеруются диаграммами λ из не более n столбцов, элементы мономиального базиса m_μ модуля симметрических функций — диаграммами из не более n строк. Выпишем векторы m_μ в строку в порядке лексикографического возрастания диаграмм μ, а векторы e_λ — в порядке лексикографического возрастания транспонированных диаграмм λ^t. Формула (5-10) утверждает теперь, что матрица координат векторов e_λ в мономиальном базисе m_λ верхнетреугольная с единицами по главной диагонали. Поскольку такая целочисленная матрица обратима над $\mathbb{Z}$, многочлены e_λ также образуют базис. □

Следствие 5.2 (основная теорема об элементарных симметрических многочленах)
Многочлены $e_1, e_2, \ldots, e_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ и любой симметрический многочлен однозначно записывается в виде многочлена от $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Иначе говоря, кольцо симметрических функций есть кольцо многочленов $\mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots, e_n]$.

Доказательство. Переписывая многочлен e_λ как $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$, где m_i — это число строк длины i в диаграмме λ, видим, что множество многочленов e_λ — это в точности множество всех различных мономов от $e_1, e_2, \ldots, e_n$. □

Следствие 5.3
Всякий симметрический многочлен от корней $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ приведённого многочлена (5-9) является многочленом от его коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а всякая симметрическая рациональная функция от корней произвольного (не обязательно приведённого) многочлена является рациональной функцией от его коэффициентов. □

5.3. Полные симметрические многочлены. Обозначим через $h_k(x)$ сумму всех мономов степени k. Многочлен h_k называется *полным симметрическим многочленом* степени k. Он равен коэффициенту при t^k у формального степенного ряда $H(t) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]\,[[t]]$, возникающего при перемножении n бесконечных геометрических прогрессий

$$H(t) = \prod_i \frac{1}{1 - x_i t} = \prod_i \left(1 + x_i t + x_i^2 t^2 + x_i^3 t^3 + \cdots\right) = \sum_{k \geqslant 0} h_k(x) \cdot t^k \tag{5-11}$$

(выбор в i-той скобке m_i-того слагаемого добавляет в произведение моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$). Таким образом, $H(t)E(-t) = 1$. Вычисляя в этом равенстве коэффициент при t^k получаем рекурсивные формулы, выражающие e_i и h_i друг через друга:

$$(-1)^k h_k = e_k - e_{k-1} h_1 + e_{k-2} h_2 - \cdots + (-1)^{k-1} e_1 h_{k-1} \tag{5-12}$$

$$(-1)^k e_k = h_k - h_{k-1} e_1 + h_{k-2} e_2 - \cdots + (-1)^{k-1} h_1 e_{k-1}\,. \tag{5-13}$$

Предложение 5.3

Отображение ω, переводящее многочлен e_k в многочлен h_k (при $k = 1, \dots, n$) является инволютивным автоморфизмом кольца симметрических многочленов.

Доказательство. Поскольку кольцо симметрических функций изоморфно кольцу многочленов от $e_1, e_2, \dots, e_n$, отображение $e_k \mapsto h_k$ однозначно продолжается до гомоморфизма ω из кольца симметрических функций в себя. Из рекурсивных формул (5-12) и (5-13) вытекает, что этот гомоморфизм переводит h_k обратно в e_k, т. е. является инволюцией и, как следствие, автоморфизмом. □

Следствие 5.4

Многочлены $h_1, h_2, \dots, h_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен (в том числе h_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена от $h_1, h_2, \dots, h_n$.

5.4. Степенные суммы Ньютона. Сумма k-тых степеней всех переменных

$$p_k(x) = \sum_i x_i^k \tag{5-14}$$

называется k-тым *симметрическим многочленом Ньютона*. Многочлены $p_k(x)$ с $k \geqslant 1$ удобно воспринимать как коэффициенты ряда

$$\begin{aligned} P(t) = \sum_{k \geqslant 1} p_k(x) \cdot t^{k-1} &= \sum_i \sum_{k \geqslant 1} x_i^k \cdot t^{k-1} = \sum_i \frac{d}{dt} \sum_{k \geqslant 1} x_i^k \cdot \frac{t^k}{k} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum_i \ln(1 - x_i \cdot t) = \frac{d}{dt} \ln \prod_i \frac{1}{1 - x_i \cdot t} = \frac{d}{dt} \ln H(t) \end{aligned} \tag{5-15}$$

который является логарифмической производной от ряда $H(t) = 1/E(-t)$. Таким образом,

$$P(t) = H'(t)/H(t) = E'(-t)/E(-t)\,.$$

Сравнивая коэффициенты при t^{k-1} в равенствах $H(t)P(t) = H'(t)$ и $E(-t)P(t) = E'(-t)$, получаем рекурсивные *формулы Ньютона* для выражения p_k через h_k и e_k соответственно:

$$p_k = k h_k - h_{k-1} p_1 - h_{k-2} p_2 - \cdots - h_1 p_{k-1} \tag{5-16}$$

$$(-1)^{k-1} p_k = k e_k - e_{k-1} p_1 + e_{k-2} p_2 - \cdots + (-1)^{k-1} e_1 p_{k-1}\,. \tag{5-17}$$

Из этих формул индукцией по k заключаем, что многочлен p_k является собственным вектором инволюции ω из предл. 5.3 с собственным значением $(-1)^{k-1}$:

$$\omega(p_k) = (-1)^{k-1} p_k\,. \tag{5-18}$$

Следствие 5.5

Многочлены $p_1, p_2, \dots, p_n$ алгебраически независимы в $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ и любой симметрический многочлен с рациональными коэффициентами (в том числе p_m с $m > n$) однозначно записывается в виде многочлена с рациональными коэффициентами от $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Доказательство. Из формулы (5-17) вытекает, что в кольце $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ $\mathbb{Q}$-линейная оболочка всевозможных мономов $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$ от $p_1, p_2, \dots, p_n$ совпадает с $\mathbb{Q}$-линейной оболочкой всевозможных мономов $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$ от $e_1, e_2, \dots, e_n$. Поскольку по сл. 5.4 мономы $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_n^{m_n}$ линейно независимы, мономы $p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots p_n^{m_n}$ также линейно независимы. □

5.4.1. Явное выражение e_k и h_k через p_k. Для любого конечного набора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ невозрастающих неотрицательных целых чисел, состоящего из m_1 единиц, m_2 двоек, m_3 троек и т. д. (так что $\sum\limits_k k \cdot m_k = |\lambda|$), положим

$$\begin{aligned} p_\lambda &= p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} p_{\lambda_3} \cdots = p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} \cdots \\ \varepsilon_\lambda &= (-1)^{\sum (k-1) m_k} = (-1)^{|\lambda|} (-1)^{\sum m_k} = (-1)^{\sum (\lambda_i - 1)} \\ z_\lambda &= \prod_k (m_k! \cdot k^{m_k}) \end{aligned} \tag{5-19}$$

и условимся в дальнейшем не различать между собою наборы λ, получающиеся друг из друга приписыванием справа любого количества нулей. Множество многочленов p_λ — это в точности множество всевозможных мономов от p_i. Переход от нумерации мономов диаграммами Юнга к их обычному представлению при помощи набора показателей степеней — это переход от невозрастающей последовательности $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ длин строк диаграммы к вектору $m(\lambda) = (m_1, m_2, \dots)$ i-тая компонента которого равна количеству строк длины i в λ. Отметим, что все мономы p_λ являются собственными векторами инволюции ω:

$$\omega(p_\lambda) = \varepsilon_\lambda \cdot p_\lambda . \tag{5-20}$$

Упражнение 5.3. Покажите, что для любой диаграммы Юнга λ число z_λ равно количеству перестановок в симметрической группе $S_{|\lambda|}$, коммутирующих с произвольным образом фиксированной перестановкой циклового типа λ, и что всего в $S_{|\lambda|}$ имеется $|\lambda|!/z_\lambda$ перестановок циклового типа λ.

Предложение 5.4

Многочлены e_k и h_k выражаются через $\mathbb{Q}$-базис p_λ по формулам:

$$h_k = \sum_{|\lambda|=k} z_\lambda^{-1} p_\lambda \tag{5-21}$$

$$e_k = \sum_{|\lambda|=k} \varepsilon_\lambda z_\lambda^{-1} p_\lambda \tag{5-22}$$

(суммирование по всем k-клеточным диаграммам Юнга).

Доказательство. Достаточно доказать формулу (5-21), формула (5-22) получается из неё применением инволюции ω из предл. 5.3. Согласно (5-15)

$$H(t) = e^{\int P(t)\,dt} = e^{\sum p_i t^i / i} = \prod e^{p_i t^i / i} = \prod_{i \geqslant 1} \sum_{m \geqslant 0} \frac{p_i^m}{i^m m!} \, t^{im} .$$

Коэффициент при t^k в правой части возникает при выборе в i-той перемножаемой скобке m_i-того слагаемого так, чтобы $\sum\limits_i i \cdot m_i = k$. Такие выборы биективно соответствуют диаграммам Юнга λ веса k, имеющих m_1 строк длины 1, m_2 строк длины 2 и т. д., а произведение слагаемых, отвечающих такому выбору, равно p_λ / z_λ . □

5.5. Детерминантные тождества. В этом разделе мы установим связь между многочленами Шура s_λ и полными симметрическим функциями h_k в кольце $\mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Обозначим через $e_k^{(p)}(x)$ результат подстановки в $e_k(x)$ значения $x_p = 0$. Таким образом, $e_k^{(p)}$ — это элементарная симметрическая функция от $(n-1)$ переменных $(x_1, \dots, \widehat{x}_p, \dots, x_n)$, где «крышка» означает пропуск переменной x_p. Производящая функция для многочленов $e_k^{(p)}$ с фиксированным p имеет вид

$$E^{(p)}(t) = \sum_k e_k^{(p)}(x) \cdot t^k = \prod_{i \neq p} (1 + x_i t) .$$

Поэтому $H(t)E^{(p)}(-t) = (1 - x_p t)^{-1}$. Сравнивая коэффициенты при t^k в обеих частях, получаем соотношение

$$h_0 \cdot (-1)^k e_k^{(p)} + h_1 \cdot (-1)^{k-1} e_{k-1}^{(p)} + \dots + h_k \cdot e_0^{(p)} = x_p^k ,$$

справедливое для всех целых неотрицательных k, если положить $e_j^{(p)} = 0$ при $j > n-1$. С учётом этого замечания удобнее записывать предыдущую формулу как

$$x_p^k = h_{k-n+1} \cdot (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} + h_{k-n+2} \cdot (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(p)} + \dots + h_k \cdot e_0^{(p)} = \sum_{j=1}^{n} h_{k-n+j} \cdot (-1)^{n-j} e_j^{(p)} . \quad (5\text{-}23)$$

Будем воспринимать её как произведение строки $(h_{k-n+1}, h_{k-n+2}, \dots, h_k)$ длины n на столбец

$$\begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(p)} \\ \vdots \\ e_2^{(p)} \\ -e_1^{(p)} \\ 1 \end{pmatrix}$$

высоты n. Если организовать h-строки, отвечающие каким-нибудь n фиксированным строго убывающим значениям $k = \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ (где $\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n$) в матрицу

$$H_\nu = (h_{\nu_i - n + j}) = \begin{pmatrix} h_{\nu_1-n+1} & h_{\nu_1-n+2} & \cdots & h_{\nu_1} \\ h_{\nu_2-n+1} & h_{\nu_2-n+2} & \cdots & h_{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ h_{\nu_n-n+1} & h_{\nu_n-n+2} & \cdots & h_{\nu_n} \end{pmatrix}$$

(где мы полагаем $h_0 = 1$ и $h_j = 0$ при $j < 0$), а все e-столбцы, отвечающие n различным значениям $p = 1, 2, \dots, n$, — в матрицу

$$M = \left((-1)^{n-i} e_{n-i}^{(j)} \right) = \begin{pmatrix} (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(1)} & (-1)^{n-1} e_{n-i}^{(2)} & \cdots & (-1)^{n-1} e_{n-1}^{(n)} \\ (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(1)} & (-1)^{n-2} e_{n-i}^{(2)} & \cdots & (-1)^{n-2} e_{n-2}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

то формула (5-23) превратится в матричное равенство $D_\nu = H_\nu \cdot M$, где

$$D_\nu = (x_j^{\nu_i}) = \begin{pmatrix} x_1^{\nu_1} & x_2^{\nu_1} & \cdots & x_n^{\nu_1} \\ x_1^{\nu_2} & x_2^{\nu_2} & \cdots & x_n^{\nu_2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{\nu_n} & x_2^{\nu_n} & \cdots & x_n^{\nu_n} \end{pmatrix}$$

Таким образом, для любой диаграммы Юнга ν со строго убывающими длинами строк

$$\Delta_\nu = \det D_\nu = \det H_\nu \cdot \det M .$$

При $\nu = \delta$ матрица H_δ верхняя унитреугольная. Поэтому $\det H_\delta = 1$ и $\det M = \det D_\delta = \Delta_\delta$. Мы получаем выражение полиномов Шура через полные симметрические функции:

$$s_\lambda = \Delta_{\delta+\lambda}/\Delta_\delta = \det D_{\delta+\lambda}/\det M = \det H_{\delta+\lambda} = \det\left(h_{\lambda_i+j-i}\right) \tag{5-24}$$

Предложение 5.5 (первая формула Джамбелли)

$$s_\lambda = \det \begin{pmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \ddots & h_{\lambda_1+n-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots & h_{\lambda_{n-1}+1} \\ h_{\lambda_n-n+1} & \ddots & h_{\lambda_n-1} & h_{\lambda_n} \end{pmatrix} \tag{5-25}$$

(по главной диагонали стоят $h_{\lambda_1}, h_{\lambda_2}, \dots, h_{\lambda_n}$, и при движении вдоль строк слева направо индексы у h с каждым шагом увеличиваются на единицу). □

5.5.1. Примеры. В $\mathbb{Z}[x_1, x_2]$ получаем соотношение $s_{(2,1)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix} = h_1h_2 - h_3 = e_1e_2 - e_3$. При $n = 3$, т. е. в $\mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3]$, получаем в точности то же самое разложение

$$s_{(2,1)} = s_{(2,1,0)} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 & h_4 \\ 1 & h_1 & h_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} h_2 & h_3 \\ 1 & h_1 \end{pmatrix}$$

Упражнение 5.4. Убедитесь, что выражение s_λ через h_k, полученное при числе переменных n, равном высоте диаграммы λ, сохраняется и при любом большем числе переменных.

Беря в качестве λ диаграмму из одной строки длины k, мы получаем равенство $s_{(k)} = h_k$, очевидное при $n = 1$ и по упр. 5.4 справедливое для всех n. Отметим, что при непосредственном вычислении определителей $\Delta_{\delta+(n)}$ и Δ_δ произвольного размера $n \times n$ равенство $\Delta_{\delta+(n)} = h_k \cdot \Delta_\delta$ отнюдь не очевидно.

Упражнение 5.5. Покажите, что $s_{(1^k)} = e_k$ при любом $n \geqslant k$ ($\lambda = (1^k)$ означает столбец высоты k).

5.5.2. Формула Пьери выражает произведение $s_\lambda \cdot h_k = s_\lambda \cdot s_{(k)}$ через многочлены s_μ. Для её вывода нам придётся слегка обобщить сказанное в n° 5.1. А именно, рассмотрим вместо кольца многочленов кольцо формальных степенных рядов $\mathbb{Z}[[x_1, x_2, \dots, x_n]]$, а в нём — симметрические и кососимметрические ряды (первые образуют подкольцо, вторые — модуль над этим подкольцом). То же рассуждение, что и в n° 5.1.2 показывает, что всякий кососимметричный ряд A однозначно записывается в виде бесконечной целочисленной линейной комбинации альтернированных S_n-орбит мономов

$$A = \sum_{\nu_1 > \nu_2 > \dots > \nu_n} c_\nu \cdot \Delta_\nu \tag{5-26}$$

где $c_\nu \in \mathbb{Z}$, $\Delta_\nu = \Delta_\nu = \sum\limits_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g)\, x_{g(1)}^{\nu_1} x_{g(2)}^{\nu_2} \cdots x_{g(n)}^{\nu_n}$, и суммирование происходит по всем диаграммам Юнга $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ из n строк строго убывающей длины.

Лемма 5.1

Разложение (5-26) для произведения базисного кососимметрического многочлена Δ_ν на симметрический ряд $H(x) = \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - x_i)^{-1} = \prod\limits_{i=1}^{n}\left(1 + x_i + x_i^2 + x_i^3 + \cdots\right) = \sum\limits_{k \geqslant 0} h_k(x)$ имеет вид

$$\Delta_\nu \cdot H = \sum_\eta \Delta_\eta\,,$$

где суммирование идёт по всем $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ с $\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n$.

Доказательство. Для любых n рядов $f_1(t),\ f_2(t),\ \dots,\ f_n(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ положим

$$f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n = \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) f_1\left(x_{g(1)}\right) f_2\left(x_{g(2)}\right) \cdots f_n\left(x_{g(n)}\right) \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]\,.$$

Например, $t^{\nu_1} \wedge t^{\nu_2} \wedge \ldots \wedge t^{\nu_n} = \Delta_\nu$. Произведение $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ является кососимметрическим рядом, полилинейно и кососимметрично зависящим от $f_1, f_2, \dots, f_n$. В частности, $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$ не изменяется при добавлении к любому из рядов любой линейной комбинации остальных.

В этих обозначениях $\Delta_\nu \cdot H = \sum\limits_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \prod\limits_{i=1}^{n} x_{g(i)}^{\nu_i} \left(1 - x_{g(i)}\right)^{-1} = f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n$, где

$$f_i(t) = x^{\nu_i}(1 - x_i t)^{-1} = t^{\nu_i} + t^{\nu_i + 1} + t^{\nu_i + 2} + \cdots\,.$$

Вычитая f_1 из всех остальных рядов, мы обрезаем их до многочленов степени $< \nu_1$. Вычитая второй из них из всех последующих, обрезаем их до многочленов степени $< \nu_2$. Действуя в таком духе, получим равенство $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n = \widehat{f_1} \wedge \widehat{f_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{f_n}$, в котором $\widehat{f_1} = f_1 = \sum\limits_{j \geqslant \nu_1} t^j$, а каждый следующий $\widehat{f_i} = t^{\nu_i} + t^{\nu_i + 1} + \cdots + t^{\nu_{i-1} - 1}$. В силу полилинейности $\wedge$-произведения

$$\widehat{f_1} \wedge \widehat{f_2} \wedge \cdots \wedge \widehat{f_n} = \sum_\eta t^{\eta_1} \wedge t^{\eta_2} \wedge \ldots \wedge t^{\eta_n} = \sum_\eta \Delta_\eta\,,$$

где суммирование идёт по всем $\eta_1 \geqslant \nu_1 > \eta_2 \geqslant \nu_2 > \eta_3 \geqslant \nu_3 > \cdots \eta_n \geqslant \nu_n$. □

Следствие 5.6 (формула Пьери)

$$s_\lambda \cdot h_k = \sum_\mu s_\mu\,,$$

где суммирование происходит по всем диаграммам μ из $\leqslant n$ строк, которые можно получить, добавляя к диаграмме λ ровно k клеток так, чтобы никакие две из них не попали в один столбец.

Доказательство. По лем. 5.1 имеем равенство $\Delta_{\delta+\lambda} \sum\limits_{k \geqslant 0} h_k = \sum\limits_{\tau} \Delta_{\delta+\mu}$, где суммирование происходит по всем диаграммам μ, Таким что[1] $\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ \dots$. Деля обе части на Δ_δ и беря в полученном равенстве однородную компоненту степени $|\lambda| + k$ по x, получаем требуемую формулу. □

5.5.3. Замечание. Если диаграмма λ состоит из $k < n$ строк, что отвечает значениям $\lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \cdots = \lambda_n = 0$, диаграммы μ в формуле Пьери могут содержать на одну строку больше, чем в диаграмме λ. Например, при $n = 2$ получаем $s_{(2)} \cdot h_1 = s_{(2,1)} + s_{(3)}$ (откуда, между прочим, снова получается равенство $s_{(2,1)} = h_2 h_1 - h_3$ из n° 5.5.1).

На самом деле, удобно думать про симметрические многочлены, не привязываясь к конкретному числу переменных, а считая, что переменных достаточно много для того, чтобы все участвующие в рассуждении функции были определены. Формализовать это можно введя кольцо симметрических функций от бесконечного числа переменных.

5.6. Кольцо симметрических функций. Условимся не различать между собою две диаграммы λ', λ'', а также два набора показателей m', m'', если они получаются друг из друга дописыванием справа любого числа нулей. Для любого набора занумерованных натуральными числами букв q_i, $i \in \mathbb{N}$, положим

$$q_\lambda = q_{\lambda_1} q_{\lambda_2} q_{\lambda_3} \cdots \quad \text{и} \quad q^m = q_1^{m_1} q_2^{m_2} q_1^{m_3} \cdots\,.$$

[1] напомним (см. n° 5.1.2), что $\lambda_i = \nu_i - n + i$, $\mu_i = \eta_i - n + i$, поэтому неравенства $\eta_i \geqslant \nu_i > \eta_{i+1}$ равносильны неравенствам $\mu_i \geqslant \lambda_i \geqslant \mu_{i+1}$

Запись $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots) = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3}, \dots)$ всегда будет означать, что λ содержит m_i строк длины i для всех $i \in \mathbb{N}$. Это происходит тогда и только тогда, когда $q_\lambda = q^m$. Наконец, положим $m_\lambda = s_\lambda = 0$ всякий раз, когда число переменных меньше количества строк в диаграмме λ, и $e_\lambda = 0$, когда число переменных меньше количества столбцов в диаграмме λ.

При так соглашениях каждый из симметрических многочленов $m_\lambda(x)$, $s_\lambda(x)$, $e_\lambda(x)$, $h_\lambda(x)$ и $p_\lambda(x)$ определён для переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_r)$ любой размерности r, причём при $r > s$ при подстановке

$$x_{s+1} = x_{s+2} = \dots = x_r = 0 \tag{5-27}$$

каждый из этих многочленов превращается в одноимённый многочлен от меньшего набора переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_s)$. Подстановка (5-27) задаёт сюрьективный гомоморфизм колец

$$\zeta_{sr} : \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_r] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_s]\,. \tag{5-28}$$

Будем называть последовательность симметрических многочленов $f^{(n)} \in \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ (по одному многочлену для каждого числа переменных $n \in \mathbb{N}$) *симметрической функцией степени* d и обозначать такую функцию просто через f, если выполняются два условия:

- при всех n многочлен $f^{(n)}$ однороден степени d
- $\zeta_{rs}\left(f^{(r)}\right) = f^{(s)}$ при любых $r > s$

При этом запись $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по определению означает $f^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, но поскольку верхний индекс у f равен числу подставляемых переменных, писать его нет смысла.

Так, последовательность мономиальных многочленов $(m_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ с фиксированной диаграммой λ веса $|\lambda| = d$ образует симметрическую функцию степени d, которая обозначается m_λ. Например, на наборах из одной, двух и трёх переменных кубическая симметрическая функция $m_{(2,1)}$ имеет вид

$$m_{(2,1)}(x_1) = 0 \tag{5-29}$$
$$m_{(2,1)}(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 \tag{5-30}$$
$$m_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2x_2 + x_1x_2^2 + x_1^2x_3 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2\,. \tag{5-31}$$

Аналогичным образом определяются и симметрические функции s_λ, e_λ, h_λ и p_λ степени $|\lambda|$.

Симметрические функции степени d образуют $\mathbb{Z}$-модуль. Его принято обозначать Λ_d. Из сказанного в предыдущих разделах вытекает, что симметрические функции m_λ, s_λ, e_λ и h_λ, занумерованные всевозможными диаграммами Юнга веса $|\lambda| = d$, являются базисами в Λ_d, а симметрические функции p_λ составляют базис векторного пространства $\mathbb{Q} \otimes \Lambda_d$ симметрических функций с рациональными коэффициентами. Таким образом, Λ_d является свободным модулем *конечного* ранга, равного количеству диаграмм Юнга веса d. Это количество принято обозначать $p(d)$ и называть *числом разбиений* натурального числа d.

Поскольку произведение симметрических функций степеней d_1 и d_2 является симметрической функцией степени d_1d_2, прямая сумма

$$\Lambda = \bigoplus_{d\geqslant 0} \Lambda_d$$

представляет собою градуированное кольцо. Оно называется *кольцом симметрических функций*. Все доказанные выше соотношения между функциями m_λ, s_λ, e_λ, h_λ и рекурсивные выражения p_i через e_j и h_j являются тождествами в кольце Λ, а выражения h_i и e_i через p_λ — тождествами в кольце $\mathbb{Q} \otimes \Lambda$ симметрических функций с рациональными коэффициентами.