§4. Исчисление формальных степенных рядов (напоминания)

4.1. Алгебраические операции над рядами. Пусть K — произвольное коммутативное кольцо с единицей. Операция, сопоставляющая рядам $f_1, f_2, \dots, f_n \in K[[x]]$ новый ряд $g \in K[[x]]$, называется *алгебраической*, если каждый коэффициент ряда g вычисляется конечным числом арифметических действий над конечным числом коэффициентов рядов $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Например, сложение и умножение рядов — это алгебраические операции, а подстановка вместо x численного значения $\alpha \in K$ алгебраической операцией обычно не является[1]. Напротив, подстановка в ряд $f(x)$ вместо x другого ряда $g(x) = b_1x + b_2x^2 + \cdots$ *без свободного члена* — это алгебраическая операция, дающая ряд

$$
\begin{aligned}
f(g(x)) = \sum_{k\geqslant 0} a_k(b_1x + b_2x^2 + \cdots)^k = \\
= a_0 + a_1(b_1x + b_2x^2 + \cdots) + a_2(b_1x + b_2x^2 + \cdots)^2 + a_3(b_1x + b_2x^2 + \cdots)^3 + \cdots = \\
= a_0 + (a_1b_1)\cdot x + (a_1b_2 + a_2b_1^2)\cdot x^2 + (a_1b_3 + 2\,a_2b_1b_2 + a_3b_1^3)\cdot x^3 + \cdots ,
\end{aligned}
$$

в котором на коэффициент при x^m влияют лишь начальные члены первых m слагаемых. Ещё одним примером алгебраической операции является деление рядов.

Предложение 4.1

Ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots \in K[[x]]$ тогда и только тогда обратим в $K[[x]]$, когда его свободный член a_0 обратим в K. Если обратный ряд существует, то операция обращения $f \mapsto f^{-1}$ является алгебраической.

Доказательство. Если существует ряд $f^{-1}(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \in K[[x]]$, такой что $f(x)\cdot f^{-1}(x) = 1$, то $a_0b_0 = 1$, откуда a_0 обратим. Наоборот, допустим, что $a_0 \in K$ обратим. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в правой и левой части равенства $f(x)\cdot f^{-1}(x) = 1$, мы получаем на коэффициенты b_i бесконечную систему уравнений

$$
\begin{aligned}
a_0b_0 &= 1\\
a_0b_1 + a_1b_0 &= 0\\
a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 &= 0\\
\dots\dots\dots\dots&\dots\dots\dots
\end{aligned}
\tag{4-1}
$$

из которой они рекурсивно определяются как $b_0 = a_0^{-1}$, $b_k = -a_0^{-1}(a_1b_{k-1} + a_2b_{k-2} + \cdots + a_kb_0)$ при $k \geqslant 1$. □

4.2. Дифференциальное исчисление. Подставим в степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ вместо x сумму $x+t$, где t — ещё одна переменная. Получится ряд от двух переменных $f(x+t) = a_0 + a_1(x+t) + a_2(x+t)^2 + \cdots \in K[[x,t]]$. Раскроем в нём все скобки и сгруппируем слагаемые по степеням переменной t, обозначив через $f_m(x) \in K[[x]]$ ряд, который получится в качестве коэффициента при t^m:

$$
f(x+t) = f_0(x) + f_1(x)\cdot t + f_2(x)\cdot t^2 + f_3(x)\cdot t^3 + \cdots = \sum_{i\geqslant 0} f_m(x)\cdot t^m\,. \tag{4-2}
$$

Упражнение 4.1. Убедитесь, что $f_0(x) = f(x)$ совпадает с исходным рядом f.

[1] очевидным исключением из этого правила служит вычисление значения ряда $f(x)$ при $x = 0$, дающее в качестве результата свободный член этого ряда; похожий эффект иногда возникает при вычислении значений некоторых специальных рядов и в некоторых других специальных точках; но при произвольных α и f вычисление $f(\alpha)$ требует, вообще говоря, выполнения бесконечно большого количества сложений

Ряд $f_1(x)$, служащий коэффициентом при t^1, называется *производной* от исходного ряда f и обозначается $f'(x)$ или $\frac{d}{dx}f$. Он однозначно определяется тем, что

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)\cdot t + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,,$$

и, стало быть, может быть вычислен как значение при $t=0$ ряда

$$\frac{f(x+t)-f(x)}{t} = a_1\cdot\frac{(x+t)-t}{t} + a_2\cdot\frac{(x+t)^2-t^2}{t} + a_3\cdot\frac{(x+t)^3-t^3}{t} + \cdots =$$
$$= \sum_{k\geqslant 1} a_k\cdot\Big((x+t)^{k-1} + (x+t)^{k-2}x + (x+t)^{k-3}x^2 + \cdots + x^{k-1}\Big)\,.$$

Полагая справа $t=0$, получаем стандартное разложение для производной:

$$f'(x) = \sum_{k\geqslant 1} k\,a_k x^{k-1} = a_1 + 2\,a_2 x + 3\,a_3 x^2 + \cdots \tag{4-3}$$

Предложение 4.2
Для любого $\alpha\in K$ и любых $f,g\in K[[x]]$ справедливы равенства

$$(\alpha f)' = \alpha\cdot f'\,,\quad (f+g)' = f'+g'\,,\quad (fg)' = f'\cdot g + f\cdot g'\,. \tag{4-4}$$

Кроме того, если ряд g не имеет свободного члена, то

$$(f(g(x)))' = g'(x)\cdot f'(g(x))\,, \tag{4-5}$$

а если ряд f обратим, то

$$(1/f)' = -\frac{f'}{f^2}\,. \tag{4-6}$$

Доказательство. Первые два равенства в (4-4) вытекают прямо из формулы (4-3). Для доказательства третьего перемножим ряды

$$f(x+t) = f(x) + t\cdot f'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)$$
$$g(x+t) = g(x) + t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,.$$

С точностью до членов, делящихся на t^2, получим

$$f(x+t)g(x+t) = f(x)g(x) + t\cdot(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,,$$

откуда $(fg)' = f'\cdot g + f\cdot g'$. Формула (4-5) доказывается похожим образом. Подставим в $f(x)$ вместо x ряд $g(x+t)$: $f(g(x+t)) = f\big(g(x) + t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\big)$ и обозначая ряд, который прибавляется к $g(x)$ в аргументе f, через $\tau(x,t) = t\cdot g'(x) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)$. Получаем

$$f(g(x+t)) = f\big(g(x)+\tau(x,t)\big) =$$
$$= f(g(x)) + \tau(x,t)\cdot f'(g(x)) + (\text{члены, делящиеся на } \tau(x,t)^2) =$$
$$= f(g(x)) + t\cdot g'(x)\cdot f'(g(x)) + (\text{члены, делящиеся на } t^2)\,,$$

откуда $(f(g(x)))' = g'(x)\cdot f'(g(x))$. Для доказательства последней формулы продифференцируем обе части равенства $f\cdot f^{-1} = 1$. Получим $f'\cdot f^{-1} + f\cdot\big(f^{-1}\big)' = 0$, откуда $\big(f^{-1}\big)' = -f'/f^2$. □

Упражнение 4.2. Покажите, что в разложении (4-2) $f_m(x) = \frac{1}{m!}\,\frac{d^m}{dx^m}\,f(x)$.

4.2.1. Пример: дифференцирование степеней. Применяя правило Лейбница к произведению $f^m = f \cdot f \cdot \cdots \cdot f$ получаем для любого ряда f формулу

$$(f^m)' = m \cdot f^{m-1} \cdot f' \,. \tag{4-7}$$

С её помощью нетрудно развернуть в ряд m-тую степень геометрической прогрессии $1/(1-x)^m$.

Упражнение 4.3. Используя формулы (4-6) и (4-7) покажите, что m-тая производная от $(1-x)^{-1}$ равна $m!/(1-x)^{m+1}$.

Дифференцируя $(m-1)$ раз обе части $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$, получим по предыдущей задаче

$$\frac{1}{(1-x)^m} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{(k+m-1)(k+m-2)\,\cdots\,(k+1)}{(m-1)!} \cdot x^k \,. \tag{4-8}$$

4.3. Первообразные, логарифмы и экспоненты. Начиная с этого места и до конца параграфа мы будем по умолчанию предполагать, что область коэффициентов $K = \mathbb{F}$ является полем характеристики нуль. В этом случае из формулы (4-3) для производной вытекает, что для любого ряда $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$ существует единственный ряд без свободного члена, производная от которого равна $f(x)$. Этот ряд называется *первообразным рядом* или *интегралом* от f и обозначается

$$\int f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} a_0x + \frac{a_1}{2}\,x^2 + \frac{a_2}{3}\,x^3 + \,\cdots\, = \sum_{k\geqslant 1} \frac{a_{k-1}}{k}\,x^k \,. \tag{4-9}$$

4.3.1. Логарифмирование. Первообразный ряд от знакопеременной геометрической прогрессии называется *логарифмом* и обозначается

$$\ln(1+x) \overset{\text{def}}{=} \int \frac{dx}{1+x} = \int \left(1 - x + x^2 - x^3 + \,\cdots\,\right) dx =$$
$$= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \,\cdots\, = \sum_{k\geqslant 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \,. \tag{4-10}$$

Вместо $1+x$ в логарифм можно подставить любой ряд $u(x)$ с единичным свободным членом — ряд $\ln(u(x))$ получается подстановкой в правую часть (4-10) вместо x ряда $u(x)-1$ без свободного члена, что является, как мы видели в (n° 4.1), алгебраической операцией.

Упражнение 4.4 (логарифмическая производная). Выведите из формулы (4-5) для производной сложной функции, что для любого ряда u с единичным свободным членом $(\ln u)' = u'/u$ (правая часть этого равенства называется *логарифмической производной* от ряда u).

Обозначим через $N \subset \mathbb{F}[[x]]$ аддитивную абелеву группу всех рядов без свободного члена, а через $U \subset \mathbb{F}[[x]]$ — мультипликативную абелеву группу всех рядов с единичным свободным членом. Операция *логарифмирования*, переводящая ряд $u(x) \in U$ в ряд $\ln(u(x)) \in N$, является алгебраической и задаёт отображение

$$\log : U \xrightarrow{u \mapsto \ln u} N \,. \tag{4-11}$$

Мы собираемся показать, что это отображение является изоморфизмом абелевых групп. Для этого потребуется отображение, обратное к логарифмированию.

4.3.2. Экспоненцирование. Ряд

$$e^x \overset{\text{def}}{=} \sum_{k\geqslant 0} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \,\cdots \tag{4-12}$$

называется *экспонентой*. Это единственный ряд со свободным членом единица, удовлетворяющий дифференциальному уравнению $f'(x) = f(x)$.

Подставляя в (4-12) вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, мы получаем ряд $e^{\tau(x)}$ со свободным членом 1, который называется *экспонентой* ряда $\tau(x)$. Таким образом, возникает экспоненциальное отображение

$$\exp : N \xrightarrow{\tau \mapsto e^{\tau}} U \,. \tag{4-13}$$

Предложение 4.3
Экспоненциальное и логарифмическое отображения (4-13) и (4-11) являются взаимно обратными изоморфизмами абелевых групп. В частности, для любых рядов $u, u_1, u_2 \in U$ и $\tau, \tau_1, \tau_2 \in N$ выполняются тождества: $\ln e^{\tau} = \tau$, $e^{\ln u} = u$, $\ln(u_1u_2) = \ln(u_1) + \ln(u_2)$, $e^{\tau_1+\tau_2} = e^{\tau_1}e^{\tau_2}$.

Доказательство. Ряды $\ln(e^x)$ и x оба имеют нулевой свободный член и одинаковые производные:

$$\ln(e^x)' = \frac{(e^x)'}{e^x} = \frac{e^x}{e^x} = 1 = x' \,.$$

Поэтому $\ln(e^x) = x$. Подставляя в это равенство вместо x любой ряд $\tau(x)$ без свободного члена, получаем

$$\ln e^{\tau} = \tau \qquad \forall\, \tau \in N \ \ . \tag{4-14}$$

Заметим теперь, что для проверки равенства двух рядов $f, g \in U$ достаточно установить равенство их логарифмических производных, поскольку из

$$0 = \ln'(f) - \ln'(g) = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = \frac{g}{f} \cdot \left(\frac{f}{g}\right)'$$

вытекает, что $(f/g)' = 0$ и $f/g = \text{const} = 1$. Из этого замечания и формулы (4-14) вытекает, что для любого ряда $u \in U$ выполняется равенство

$$e^{\ln u} = u \tag{4-15}$$

(логарифмы от обоих частей совпадают, а значит совпадают и логарифмические производные). Таким образом, экспоненцирование и логарифмирование взаимно обратны и, стало быть, оба биективны. Для любых рядов $u_1, u_2 \in U$ ряды $\ln(u_1u_2)$ и $\ln u_1 + \ln u_2$ оба имеют нулевой свободный член и одинаковые производные:

$$(\ln(u_1u_2))' = \frac{(u_1u_2)'}{u_1u_2} = \frac{u_1'u_2 + u_1u_2'}{u_1u_2} = \frac{u_1'}{u_1} + \frac{u_2'}{u_2} = (\ln u_1)' + (\ln u_2)' = (\ln u_1 + \ln u_2)' \ .$$

Поэтому $\ln(u_1u_2) = \ln u_1 + \ln u_2$. Таким образом, логарифмирование $U \xrightarrow{\ln} N$ является биективным гомоморфизмом. Но тогда и обратное отображение гомоморфизм. □

Упражнение 4.5. Покажите, что $\forall\, u \in U \ \ \ln(1/u) = -u$.

4.4. Бином Ньютона. Для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ определим *биномиальный ряд* с показателем α формулой

$$(1+x)^{\alpha} \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha \ln(1+x)}.$$

Подставляя вместо $1 + x$ произвольные ряды $u \in U$, мы для любого числа $\alpha \in \mathbb{F}$ получаем корректно определённую алгебраическую операцию *возведения в α-тую степень*

$$U \xrightarrow{u \mapsto u^{\alpha} = e^{\alpha \ln u}} U \,,$$

которая обладает всеми свойствами, интуитивно ожидаемыми от степенной функции. А именно, для любых рядов $u, v \in U$ и чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполняются равенства

$$u^{\alpha} \cdot u^{\beta} = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\beta \ln u} = e^{\alpha \ln u + \beta \ln u} = e^{(\alpha+\beta) \ln u} = u^{\alpha+\beta} \tag{4-16}$$

$$(u^{\alpha})^{\beta} = e^{\beta \ln(u^{\alpha})} = e^{\beta \ln\left(e^{\alpha \ln u}\right)} = e^{\alpha\beta \ln u} = u^{\alpha\beta} \tag{4-17}$$

$$(uv)^{\alpha} = e^{\alpha \ln(uv)} = e^{\alpha(\ln u + \ln v)} = e^{\alpha \ln u + \alpha \ln v} = e^{\alpha \ln u} \cdot e^{\alpha \ln v} = u^{\alpha}v^{\alpha} \tag{4-18}$$

В частности, для любого ряда u с единичным свободным членом $u^{1/n} = \sqrt[n]{u}$ в том смысле, что $\left(u^{1/n}\right)^n = u$.

Для явного отыскания коэффициентов a_i биномиального ряда

$$(1+x)^\alpha = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots$$

вычислим его логарифмическую производную:

$$\frac{((1+x)^\alpha)'}{(1+x)^\alpha} = (\ln(1+x)^\alpha)' = \left(\ln e^{\alpha\ln(1+x)}\right)' = \left(\alpha\ln(1+x)\right)' = \frac{\alpha}{1+x} .$$

Приводя левую и правую часть к общему знаменателю, получаем соотношение

$$\left(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ \cdots\right)\cdot(1+x) = \alpha\cdot(1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ \cdots) .$$

Сравнивая коэффициенты при x^{k-1} в правой и левой части, приходим к рекуррентному соотношению $ka_k + (k-1)a_{k-1} = \alpha a_{k-1}$, из которого

$$a_k = \frac{\alpha-(k-1)}{k}\cdot a_{k-1} = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))}{k(k-1)}\cdot a_{k-2} = \ \cdots$$
$$\cdots \ = \frac{(\alpha-(k-1))(\alpha-(k-2))\cdots(\alpha-1)\alpha}{k!} .$$

Стоящая в правой части дробь имеет и в числителе и в знаменателе по k множителей, представляющих собою последовательно уменьшающиеся на единицу числа: в знаменателе — от k до 1, в числителе — от α до $(\alpha-k+1)$. Эта дробь называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается

$$\binom{\alpha}{k} \overset{\text{def}}{=} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \tag{4-19}$$

Нами доказано

Предложение 4.4 (формула Ньютона)
Для любого числа $\alpha\in\mathbb{F}$ имеется разложение

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k\geqslant 0}\binom{\alpha}{k}x^k = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6}x^3 + \ \cdots .$$

4.4.1. Пример: бином с рациональными показателями. При натуральном значении показателя $\alpha = n\in\mathbb{N}$ имеется лишь конечное число ненулевых биномиальных коэффициентов, поскольку при $k > n$ в числителе (4-19) образуется нулевой сомножитель. Поэтому разложение бинома в этом случае конечно:

$$(1+x)^n = 1 + n\,x + \frac{n(n-1)}{2}\,x^2 + \ \cdots \ + x^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot x^k .$$

При целом отрицательном $\alpha = -m$, $m\in\mathbb{N}$, мы снова получаем разложение (4-8) из n° 4.2.1

$$\frac{1}{(1+x)^m} = 1 - m\,x + \frac{m(m+1)}{2}\,x^2 - \frac{m(m+1)(m+2)}{6}\,x^3 + \ \cdots \ = \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\binom{m+k}{k}\cdot x^k .$$

При $\alpha = 1/n$, $n\in\mathbb{N}$ формула Ньютона разворачивает в степенной ряд радикал

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}\,x + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)}{2}\,x^2 + \frac{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}-2\right)}{6}\,x^3 + \cdots \ =$$
$$= 1 + \frac{x}{n} - \frac{n-1}{2}\cdot\frac{x^2}{n^2} + \frac{(n-1)(2n-1)}{2\cdot 3}\cdot\frac{x^3}{n^3} - \frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{x^4}{n^4} + \ \cdots .$$

В частности, при $n = 2$ в качестве коэффициента при x^k мы получаем дробь вида

$$(-1)^{k-1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k)} = \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \frac{(2k)!}{(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k))^2} = \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1) \cdot 4^k} \cdot \binom{2k}{k}.$$

Таким образом,

$$\sqrt{1+x} = \sum_{k \geqslant 0} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot \frac{x^k}{4^k}. \tag{4-20}$$

4.4.2. Пример: числа Каталана. Воспользуемся разложением (4-20) для получения явной формулы для *чисел Каталана*, часто возникающих в различных комбинаторных задачах. Пусть при вычислении суммы $(n+1)$ слагаемых

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n \qquad \text{(всего } n \text{ плюсов)} \tag{4-21}$$

в каждый момент времени разрешается делать не более одного сложения. Такое вычисление разбивается на n последовательных шагов, на каждом из которых выполняется некоторое конкретное сложение, в результате чего все знаки «+» оказываются занумерованными в том порядке, в котором они выполняются. Количество всех возникающих таким способом нумераций n плюсов называется n-ым *числом Каталана* c_n. Удобно также по определению считать, что $c_0 = 1$. Подчеркнём, что рассматриваемые нами нумерации плюсов далеко не произвольны.

Упражнение 4.6. Убедитесь, что $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_3 = 5$, $c_4 = 14$ (и, тем самым, $c_n \neq n!$).

Количество способов вычислить сумму (4-21) так, чтобы последним выполняется i-тый слева плюс, равно $c_{i-1}c_{n-i}$ — мы можем независимо посчитать сумму i чисел, стоящих слева от i-того плюса, и $n-i+1$ чисел, стоящих от него справа, для чего у нас имеется, соответственно, c_{i-1} и c_{n-i} способов. Таким образом, числа Каталана c_n удовлетворяют соотношению

$$c_n = c_0 c_{n-1} + c_1 c_{n-2} + \dots + c_{n-2} c_1 + c_{n-1} c_0 , \tag{4-22}$$

i-тое слагаемое которого учитывает все вычисления, в которых последним выполняется i-тый слева плюс записи (4-21). Чтобы выразить c_n через n явно, образуем степенной ряд

$$c(x) = \sum_{k \geqslant 0} c_k x^k = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots .$$

Равенство (4-22) означает, что этот ряд удовлетворяет соотношению

$$\frac{c(x) - 1}{x} = c(x)^2 .$$

Иначе говоря, $t = c(x)$ является решением квадратного уравнения

$$x \cdot t^2 - t - 1 = 0$$

на неизвестную t. Решая его[2], получаем $c(x) = \left(1 - \sqrt{1-4x}\right)/(2x)$. По (4-20)

$$\sqrt{1-4x} = -\sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{2k-1} \cdot \binom{2k}{k} \cdot x^k ,$$

откуда

$$c_k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2k+1} \cdot \binom{2k+2}{k+1} = \frac{1}{k+1} \cdot \binom{2k}{k}.$$

Отметим, что с первого взгляда даже не очевидно, что это число — целое.

Упражнение 4.7. В выпуклом n угольнике проводят максимально возможное число диагоналей так, чтобы они не пересекались нигде, кроме вершин. Сколькими способами это можно сделать?

[2]обратите внимание, что ряд $1 - \sqrt{1-4x}$ не имеет свободного члена и потому делится в $\mathbb{Q}[[x]]$ на $2x$, причём частное имеет свободный член $c_0 = 1$, как нам и требуется; второе решение $\dfrac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}$ не является «целым» степенным рядом: знаменатель не обратим, а числитель, имея ненулевой свободный член, на него не делится

4.5. Действие $\mathbb{Q}[[d/dt]]$ на $\mathbb{Q}[t]$. Отображение дифференцирования

$$D\,:\,\mathbb{Q}[t]\xrightarrow{p(t)\mapsto p'(t)}\mathbb{Q}[t]\,,$$

является линейным оператором на пространстве многочленов $\mathbb{Q}[t]$. В алгебре линейных операторов на $\mathbb{Q}[t]$ корректно определена операция подстановки оператора D в любой формальный степенной ряд

$$f(x)=\sum_{k\geqslant 0}a_kx^k\in\mathbb{Q}[[x]]\,.$$

Результатом такой подстановки является линейный оператор $f(D)\,:\,\mathbb{Q}[t]\longrightarrow\mathbb{Q}[t]$, переводящий многочлен $p\in\mathbb{Q}[t]$ в

$$f(D)p=(a_0+a_1D+a_2D^2+\cdots)p=a_0\cdot p+a_1\cdot Dp+a_2\cdot D^2p+\;\cdots=\sum_{k\geqslant 0}a_k\cdot D^kp\,. \tag{4-23}$$

(мы, как обычно, полагаем $D^0=\mathrm{Id}$). Поскольку каждое применение D к многочлену с рациональными коэффициентами уменьшает его степень на единицу, все производные D^kp с $k>\deg p$ в правой части (4-23) обращаются в нуль, так что сумма в правой части (4-23) состоит из конечного числа слагаемых (зависящего от многочлена p) и, тем самым, является многочленом, который можно полностью вычислить конечным числом арифметических действий над коэффициентами исходного многочлена p и первыми $\deg(p)$ коэффициентами ряда f.

Упражнение 4.8. Вычислите результат применения операторов $\sqrt{1+D}$ и e^D к многочлену t^2.

Линейный оператор $F:\mathbb{Q}[t]\longrightarrow\mathbb{Q}[t]$ называется *разностным оператором*, если $F=f(D)$ для некоторого $f(x)\in\mathbb{Q}[[x]]$. Разностные операторы образуют коммутативную подалгебру в алгебре всех линейных операторов, и вычисление композиции разностных операторов сводится к перемножению отвечающих им рядов.

В следствие линейности, для вычисления значения разностного оператора $f(D)=a_0+a_1D+a_2D^2+\cdots$ на произвольном многочлене достаточно уметь вычислять его значение на всех базисных мономах t^m. Многочлены

$$f_m(t)=f(D)t^m$$

называются *многочленами Аппеля* ряда $f\in\mathbb{Q}[[x]]$ (и разностного оператора $f(D)$). Ясно, что $\deg f_m\leqslant m$, и коэффициенты многочлена f_m зависят только от первых $m+1$ коэффициентов $a_0,a_1,\dots,a_m$ ряда f.

4.5.1. Пример: операторы сдвига аргумента. Многочлены Аппеля для экспоненты

$$e^D=1+D+\frac{1}{2}\,D^2+\frac{1}{6}\,D^3+\;\cdots\,,$$

согласно формуле (n° 4.4.1) для разложения бинома с натуральным показателем, имеют вид

$$e^Dt^m=\sum_{k\geqslant 0}\frac{1}{k!}D^kt^m=\sum_{k\geqslant 0}\frac{m(m-1)\,\cdots\,(m-k+1)}{k!}\,t^{m-k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}t^{m-k}=(t+1)^m\,.$$

Таким образом, оператор e^D действует на произвольный многочлен сдвигом аргумента на единицу:

$$e^D:p(t)\mapsto p(t+1)\,.$$

Обратный оператор $1/e^D=e^{-D}$ сдвигает аргумент в противоположную сторону:

$$e^{-D}p(t)=p(t-1)\,.$$

Упражнение 4.9. Покажите, что $e^{\alpha D}:p(t)\mapsto p(t+\alpha)$ для произвольного $\alpha\in\mathbb{Q}$.

Упражнение 4.10. Покажите, что линейный оператор $F:\mathbb{Q}[t]\mapsto\mathbb{Q}[t]$ тогда и только тогда является разностным, когда он перестановочен со всеми операторами сдвига $e^{\alpha D}$ (для всех $\alpha\in\mathbb{Q}$).

4.5.2. Пример: вычисление степенных сумм. В работе «Ars Conjectandi» Яков Бернулли не без гордости отмечал[1], что сумел просуммировать десятые степени первой тысячи натуральных

[1] сочинение «Ars Conjectandi» было опубликовано в 1713 уже после смерти Якова Бернулли (1654–1705)

чисел менее, чем за половину четверти часа. Речь шла о вычислении суммы $1^{10}+2^{10}+3^{10}+\,\cdots\,+1000^{10}$, проделанном Бернулли при помощи открытой им формулы, выражающей

$$S_m(n) = 0^m + 1^m + 2^m + 3^m + \,\cdots\, + n^m = \sum_{k=0}^{n} k^m \tag{4-24}$$

в виде многочлена $(m+1)$-ой степени от n. Для отыскания такого многочлена рассмотрим разностный оператор[1]

$$\nabla = 1 - e^{-D} \; : \; \mathbb{Q}[t] \xrightarrow{p(t)\mapsto p(t)-p(t-1)} \mathbb{Q}[t]\,.$$

Если многочлен $S_m(t) \in \mathbb{Q}[t]$ удовлетворяет при всех целых неотрицательных $t = n$ соотношению (4-24), то $\nabla S_m(t) = t^m$. Если бы ряд $1-e^{-x}$ был обратим в $\mathbb{Q}[[x]]$, многочлен $S_m(t)$ был бы ни чем иным, как m-тым многочленом Аппеля для обратного ряда. Но, к сожалению, ряд $1-e^{-x}$ не имеет свободного члена, и стало быть не обратим. Однако, его можно записать в виде произведения:

$$1 - e^{-x} = \frac{1-e^{-x}}{x}\cdot x\,,$$

в котором первый сомножитель $(1-e^{-x})/x$ обратим. Обратный к нему ряд

$$\operatorname{td}(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{x}{1-e^{-x}} \in \mathbb{Q}[[x]]$$

называется *рядом Тодда*. Поскольку $\operatorname{td}(x)\cdot(1-e^{-x}) = x$, применяя оператор $\operatorname{td}(D)$ к обеим частям равенства $\nabla S_m(t) = t^m$, мы получаем выражение для производной от искомого многочлена $S_m(t)$:

$$S_m'(t) = DS_m(t) = \operatorname{td}(D)\nabla S_m(t) = \operatorname{td}(D)t^m\,.$$

В виду равенства $S_m(0) = 0$ многочлен $S_m(t)$ не имеет свободного члена и получается из $S_m'(t)$ интегрированием по формуле из n° 4.3. Для упрощения вычислений удобно записать ряд Тодда в «экпоненциальной форме», вынеся из коэффициентов обратные факториалы:

$$\operatorname{td}(x) = \sum_{k\geqslant 0} \frac{a_k}{k!}\,x^k \tag{4-25}$$

Тогда ответ на задачу Бернулли даётся формулой

$$\begin{aligned} S_m(t) &= \int\Big(\sum_{k=0}^{m}\frac{a_k}{k!}D^k t^m\Big)\,dt = \int\Big(\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}a_k t^{m-k}\Big)\,dt = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{a_k t^{m-k+1}}{m-k+1} = \\ &= \frac{1}{m+1}\left(\binom{m+1}{1}a_m t + \binom{m+1}{2}a_{m-1}t^2 + \,\cdots\, + \binom{m+1}{m}a_1 t^m + \binom{m+1}{m+1}a_0 t^{m+1}\right)\,, \end{aligned}$$

которую часто представляют в символическом виде

$$(m+1)\cdot S_m(t) = (a\!\downarrow + t)^{m+1} - a_{m+1}\,,$$

где стрелка у $a\!\downarrow$ предписывает заменять a^k на a_k при раскрытии бинома $(a+t)^{m+1}$.

Числа a_k находятся из определяющего ряд Тодда соотношения $\operatorname{td}(x)\cdot(1-e^{-x})/x = 1$, которое в развёрнутом виде выглядит как

$$\Big(1 + a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^2 + \frac{a_4}{24}\,x^4 + \,\cdots\,\Big)\cdot\Big(1 - \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{6}\,x^2 - \frac{1}{24}\,x^3 + \frac{1}{120}\,x^4 - \,\cdots\,\Big) = 1\,.$$

Упражнение 4.11. Найдите первую дюжину чисел a_k ([2]).

Упражнение 4.12. Напишите явные формулы для $S_4(n)$ и $S_5(n)$ ([0]).

Упражнение 4.13*. Попробуйте повторить достижение Бернулли — вычислите[0] $S_{10}(1000)$.

[1] символ ∇ читается «набла»

[2] ответы: $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = 0$, $a_4 = -\frac{1}{30}$, $a_5 = 0$, $a_6 = \frac{1}{42}$, $a_7 = 0$, $a_8 = -\frac{1}{30}$, $a_9 = 0$, $a_{10} = \frac{5}{66}$, $a_{11} = 0$, $a_{12} = -\frac{691}{2730}$

[0] ответы: $S_4(n) = n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)/30$, $S_5(n) = n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)/12$

[0] напомню, у Бернулли на это ушло около 7 минут, причём калькуляторов в те годы не было...

4.6. Числа Бернулли. Ряд Тодда вошёл в математический обиход лишь во второй половине XX века после работ Хирцебруха и Гротендика по топологии и алгебраических многообразий, где он применялся для формулировки и доказательства теоремы Риана – Роха. Во времена Бернулли и Эйлера предпочитали пользоваться рядом $\mathrm{td}(-x) = \frac{x}{e^x-1}$, который также записывали в экспоненциальной форме

$$\mathrm{td}(-x) = \frac{x}{e^x - 1} = \sum_{k\geqslant 0} \frac{B_k}{k!}\, x^k\,. \tag{4-26}$$

Коэффициенты B_k этого разложения называются *числами Бернулли* . Они отличаются от коэффициентов a_k ряда Тодда только в самом первом члене: $B_1 = -\frac{1}{2} = -a_1$. В самом деле,

$$\mathrm{td}(x) - \mathrm{td}(-x) = \frac{x}{1-e^{-x}} + \frac{x}{1-e^{x}} = x\cdot\frac{2-e^x-e^{-x}}{(1-e^{-x})\cdot(1-e^x)} = x\,. \tag{4-27}$$

Поэтому $B_k = a_k$ при $k \neq 1$, причём при всех нечётных $k \geqslant 3$ эти числа обращаются в нуль, т. к. нечётная составляющая ряда Тодда (равная половине разности (4-27)) есть $x/2$. Со времён своего открытия Яковом Бернули, числа B_k вызывают неослабевающий интерес. Имеется даже специальный интернет-ресурс `http://www.bernoulli.org/`, где, среди прочего, выложена компьтерная программа, вычисляющая числа B_k в виде несократимых рациональных дробей. Однако, не смотря на огромное количество красивых теорем о числах Бернулли, никакой внятной формулы, явно выражающей B_n через n нет, и любой содержательный новый взгляд в этом направлении был бы интересен.

Упражнение 4.14. Получите для чисел Бернулли рекурсивную формулу

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\cdot B_k\,.$$

Упражнение 4.15*. Докажите, что числа B_k с чётными $k \geqslant 2$ имеют чередующиеся знаки.