§3. Поляризация полиномов

Всюду в этом параграфе речь идёт о векторных пространствах над полем характеристики нуль.

3.1. Симметрические и кососимметрические тензоры. Симметрическая группа S_n действует на $V^{\otimes n}$ перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого $g \in S_n$ положим

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \cdots \otimes v_{g(n)} .$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от $v_1, v_2, \dots, v_n$, эта формула по лем. 1.4 корректно определяет линейный оператор $g : V^{\otimes n} \longrightarrow V^{\otimes n}$.

Определение 3.1
Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *симметрическим*, если $g(t) = t$ для всех перестановок $g \in S^n$. Тензор $t \in V^{\otimes n}$ называется *кососимметрическим*, если $g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t$ для всех перестановок $g \in S^n$. Подпространства симметрических и кососимметрических тензоров в $V^{\otimes n}$ обозначаются через

$$\mathrm{Sym}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = t \quad \forall\, g \in S_n \,\}$$
$$\mathrm{Skew}^n V = \{\, t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \mathrm{sgn}(g) \cdot t \quad \forall\, g \in S_n \,\}$$

3.1.1. Стандартные базисы. Зафиксируем в пространстве V базис $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$. Поскольку вместе с каждым тензорным мономом в любой симметрический тензор входит (с одним и тем же коэффициентом) вся S_n-орбита этого монома, *полные симметрические тензоры*

$$e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} = \left(\begin{array}{c} \text{сумма всех различных тензорных мономов, содержащих} \\ m_1 \text{ множителей } e_1,\ m_2 \text{ множителей } e_2,\ \dots,\ m_d \text{ множителей } e_d \end{array} \right) \tag{3-1}$$

(где $\sum\limits_{\nu} m_\nu = n$) образуют базис пространства симметрических тензоров $\mathrm{Sym}^n V$. Из формулы для длины орбиты следует, что сумма в правой части (3-1) состоит из $\frac{n!}{m_1!\, m_2! \cdots m_d!}$ слагаемых (т. к. стабилизатор каждого слагаемого состоит из $m_1!\, m_2! \cdots m_d!$ независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою).

Аналогичным образом, *полные кососимметрические тензоры*

$$e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{g(n)}} \tag{3-2}$$

составляют базис в пространстве $\mathrm{Skew}^n V$ (сумма в правой части состоит из $n!$ слагаемых).

3.1.2. Симметризация и альтернирование. Над полем характеристики нуль легко написать явные формулы для проекторов n-той тензорной степени $V^{\otimes n}$ на подпространства симметрических и кососимметрических тензоров. Это операторы *симметризации* и *альтернирования*, действующие по правилам

$$\mathrm{sym}_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g(t) \ : \quad V^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{Sym}^n(V) \tag{3-3}$$

$$\mathrm{alt}_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \mathrm{sgn}(g) \cdot g(t) \ : \quad V^{\otimes n} \longrightarrow \mathrm{Skew}^n(V) \tag{3-4}$$

Упражнение 3.1. Покажите, что для любых тензоров $t \in V^{\otimes n}$, $s \in \mathrm{Sym}^n(V)$ и $a \in \mathrm{Skew}^n(V)$ выполняются равенства а) $\mathrm{sym}_n(t) \in \mathrm{Sym}^n(V)$ б) $\mathrm{alt}_n(t) \in \mathrm{Skew}^n(V$ в) $\mathrm{sym}_n(s) = s$ г) $\mathrm{alt}_n(a) = a$ д) $\mathrm{sym}_n(a) = \mathrm{alt}_n(s) = 0$

При $n = 2$ симметризация и альтернирование доставляют прямое разложение

$$V^{\otimes 2} = \mathrm{Sym}^2(V) \oplus \mathrm{Skew}^2(V) . \tag{3-5}$$

В самом деле, поскольку каждый разложимый тензор представляется в виде суммы

$$u \otimes w = \frac{u \otimes w + w \otimes u}{2} + \frac{u \otimes w - w \otimes u}{2} = \mathrm{sym}_2(u \otimes w) + \mathrm{alt}_2(u \otimes w)\,,$$

образы проекторов sym_2 и alt_2 порождают $V^{\otimes 2}$, а т. к. каждый из них по упр. 3.1 аннулирует образ другого, эти образы имеют нулевое пересечение. Если интерпретировать $V^{\otimes 2}$ как пространство билинейных форм на V^*, разложение (3-5) будет ни чем иным, как каноническим разложением билинейной формы в сумму симметрической и кососимметрической.

При $n = 3$ уже не любой тензор является суммой своей симметризации и альтернирования. В самом деле, рассмотрим разность

$$p = E - \mathrm{sym}_3 - \mathrm{alt}_3 = \left(2\,E - T - T^2\right) / \, 3\,, \tag{3-6}$$

где через $V^{\otimes 3} \xrightarrow{T} V^{\otimes 3}$ обозначен оператор, отвечающий циклической перестановке $|123\rangle \in S_3$, а через $E = T^3$ — тождественный оператор. Поскольку

$$p^2 = \left(4E + T^2 + T - 4\,T - 4\,T^2 + 2\,E\right) / \, 9 = \left(2E - T - T^2\right) / \, 3 = p\,,$$

оператор p также является проектором.

Упражнение 3.2. Покажите, что $p\circ\mathrm{alt}_3 = \mathrm{alt}_3\circ p = p\circ\mathrm{sym}_3 = \mathrm{sym}_3\circ p = 0$ и выведите отсюда, что $V^{\otimes 3}$ является прямой суммой $\mathrm{Sym}^3(V)$, $\mathrm{Skew}^3(V)$ и $\mathrm{Im}\,(p)$.

Образ проектора p красиво описывается в терминах трилиненйых форм на V^*.

Упражнение 3.3. Покажите, что $\mathrm{im}\,(p)$ состоит из трилинейных форм $V^* \times V^* \times V^* \xrightarrow{\varphi} \Bbbk$, удовлетворяющих $\forall\, \xi, \eta, \zeta \in V^*$ *тождеству Якоби* $\varphi(\xi,\eta,\zeta) + \varphi(\eta,\zeta,\xi) + \varphi(\zeta,\xi,\eta) = 0$, и приведите явный пример такой формы на двумерном пространстве V^*.

При бо́льших n разложение $V^{\otimes n}$ в прямую сумму подпространств тензоров с «различными типами симметрии» становится ещё более сложным. Мы обсудим его во второй части этого курса (в разделе, посвящённом линейным представлениям симметрической группы).

Предложение 3.1

Если $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$, то ограничение оператора симметрического умножения[1] $V^{\otimes n} \longrightarrow S^nV$ на подпространство $\mathrm{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$ и ограничение внешнего умножения[0] $V^{\otimes n} \longrightarrow \Lambda^nV$ на подпространство кососимметрических тензоров $\mathrm{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$ являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные мономы (3-1) и (3-2) задаётся формулами

$$\mathrm{Sym}^nV \ni e_{[m_1,m_2,\dots,m_d]} \longmapsto \frac{(m_1+m_2+\dots+m_d)!}{m_1!m_2!\cdots m_d!} \cdot e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_d^{m_d} \in S^nV \tag{3-7}$$

$$\mathrm{Skew}^nV \ni e_{\langle i_1,i_2,\dots,i_n\rangle} \longmapsto n! \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_d} \in \Lambda^nV \tag{3-8}$$

Доказательство. Действительно, каждое из $n!/(m_1!m_2!\cdots m_d!)$ слагаемых суммы (3-1) перейдёт при проекции в симметрическую алгебру в коммутативный моном $e_1^{m_1}e_2^{m_2}\dots e_d^{m_d}$, а каждое из $n!$ слагаемых суммы (3-2) перейдёт при проекции во внешнюю алгебру в грассманов моном $n!\,e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge\, \cdots\, \wedge e_{i_n}$. □

3.1.3. Предостережение. Не смотря на изоморфизмы из предл. 3.1, *подпространства*

$$\mathrm{Sym}^nV\,,\ \mathrm{Skew}^nV \subset V^{\otimes n}\,.$$

содержащиеся в $V^{\otimes n}$ ни в коем случае не следует путать с *фактор пространствами* S^nV и Λ^nV, которые получаются из $V^{\otimes n}$ склейкой некоторых тензоров между собою.

[1] т. е. отображения факторизации по соотношениям коммутирования (2-14)

[0] т. е. отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования (2-16)

Над полем положительной характеристики $\mathrm{char}(\Bbbk) = p$ все симметрические тензоры, степень которых является степенью p, и все кососимметрические тензоры, степень которых больше p, спроектируются при проекциях $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow S^nV$ и $V^{\otimes n} \twoheadrightarrow \Lambda^nV$ в *нулевые* элементы симметрической и внешней алгебры.

Даже в характеристике нуль стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств *не отождествляются* друг с другом изоморфизмами из предл. 3.1, а переходят лишь в некоторые кратности друг друга. Эти поправочные множители приходится учитывать как при попытке поднять на (косо) симметрические тензоры (косо) коммутативное умножение, которое имеется в симметрической и грассмановой алгебрах, так и при попытке спустить в симметрическую и внешнюю алгебры отображения свёртки, которые имеются между тензорами.

3.2. Поляризация коммутативных многочленов. Рассмотрим векторное пространство V с базисом $e_1, e_2, \dots, e_d$ и двойственное пространство V^* с двойственным базисом $x_1, x_2, \dots, x_d$. Симметрическая алгебра SV^* представляет собою алгебру многочленов от координат

$$SV^* \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_d]\,,$$

и каждый элемент $f \in S^nV^*$ может восприниматься как однородная полиномиальная функция

$$V \xrightarrow{f} \Bbbk$$

степени n, сопоставляющая вектору $v = \sum \alpha_i e_i \in V$ число $f(v) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \Bbbk$.

Если интерпретировать симметрический тензор $\varphi \in \mathrm{Sym}^n(V^*) \subset V^{*\otimes n}$ как симметричную n-линейную форму, сопоставляющую каждому набору из n векторов $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ число $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) \in \Bbbk$ (линейно зависящее от каждого v_i), то проекция $V^{*\otimes n} \longrightarrow S^n(V^*)$ сопоставит такой форме однородную полиномиальную функцию степени n от одного аргумента $v \in V$:

$$f(v) = \varphi(v, v, \dots, v)\,.$$

Согласно предл. 3.1, это сопоставление является изоморфизмом между пространством n-линейных форм и пространством однородных многочленов степени n.

Следовательно, над полем характеристики нуль для каждого однородного многочлена $f \in S^n(V^*)$ существует единственная симметричная полилинейная форма $\widetilde{f} : V \times V \times \ldots \times V \longrightarrow \Bbbk$, такая что $\widetilde{f}(v, v, \dots, v) = f(v)$. Эта форма называется *полной поляризацией* многочлена f.

Отметим, что при $\deg f = 2$ мы таким образом получаем поляризацию квадратичной формы до симметричной билинейной, уже обсуждавшуюся нами ранее.

По формуле (3-7) из предл. 3.1 полная поляризация одного монома $f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$ степени $\sum m_i = n$ имеет вид

$$\widetilde{f} = \frac{m_1!\, m_2! \cdots m_d!}{n!} \cdot x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]}\,. \tag{3-9}$$

3.2.1. Пример: двойственность. Полная свёртка между $V^{\otimes m}$ и $V^{*\otimes m}$ индуцирует (в характеристике нуль) двойственность между пространствами многочленов S^mV и S^mV^*. По определению, результатом спаривания элементов $f \in S^nV$ и $g \in S^nV^*$ является полная свёртка их полных поляризаций $\widetilde{f} \in V^{\otimes m}$ и $\widetilde{g} \in V^{*\otimes m}$.

Упражнение 3.4. Проверьте, что мономы, составленные из элементов двойственных базисов пространств V и V^*, спариваются при этом по правилу

$$\left\langle\, e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_d^{m_d}\,,\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} \,\right\rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \cdots \cdot m_d!}{n!} \tag{3-10}$$

(спаривания между всеми остальными парами базисных векторов нулевые).

3.3. Частные производные в симметрической алгебре. Для любого вектора $v \in V$ имеется отображение свёртки

$$c_v^1 : V^{*\otimes n} \longrightarrow V^{*\otimes(n-1)}$$

первого тензорного сомножителя в $V^{*\otimes n}$ с вектором v. На языке n-линейных форм на пространстве V это отображение фиксирует вектор $v \in V$ в качестве первого аргумента n-линейной формы. Применяя его к полной поляризации $\widetilde{f}$ многочлена $f \in S^n(V^*)$ и затем проектируя результат из $V^{*\otimes(n-1)}$ обратно в симметрическую степень $S^{n-1}(V^*)$, мы получаем линейное отображение $S^nV^* \longrightarrow S^{n-1}V^*$, которое включается в качестве нижней горизонтальной стрелки в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
V^{*\otimes n} \supset \mathrm{Sym}^{\,n}V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \mathrm{Sym}^{\,(n-1)}V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\
S^nV^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & S^{n-1}V^*
\end{tikzcd}$$

и переводит многочлен $f(x) = \widetilde{f}(x, x, \dots x) \in S^n(V^*)$ в многочлен

$$\mathrm{pl}_v f(x) = \widetilde{f}(v, x, \dots x) \in S^{n-1}(V^*)\,, \tag{3-11}$$

который называется *полярой* вектора v относительно f и линейно зависит как от многочлена f, так и от вектора $v \in V$. При $n = 2$ эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики $f = 0$ в $\mathbb{P}(V)$ и сопоставляет вектору v уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах $\{e_\nu\} \subset V$ и $\{x_\nu\} \subset V^*$ отображение свёртки по первому индексу с базисным вектором $e_i \in V$ переводит базисный симметрический моном (3-1) в точно такой же базисный моном, но содержащий $(m_i - 1)$ множителей e_i, или в нуль, если $m_i = 0$. Поэтому, по формуле (3-7) из предл. 3.1

$$\mathrm{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \,\cdots\, x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n}\, x_1^{m_1} \cdots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i-1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \cdots x_d^{m_d} = \frac{1}{n}\, \frac{\partial}{\partial x_i}\, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \,\cdots\, x_d^{m_d}\,.$$

Из линейности $\mathrm{pl}_v f$ по v и f мы получаем, что поляра вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ относительно многочлена f есть делённая на $\deg f$ *производная* от f в направлении вектора v:

$$\mathrm{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)}\, \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i\, \frac{\partial f}{\partial x_i}\,.$$

Отметим, что из сказанного немедленно вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в V и V^*, а также коммутирование частных производных между собой: $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$ и замечательное равенство между кратными производными

$$m!\, \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n!\, \widetilde{f}(\underbrace{u, u, \dots, u}_{m}, \underbrace{w, w, \dots, w}_{n}) = (n-m)!\, \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u)\,, \tag{3-12}$$

для любых $u, w \in V$, любого $f \in S^nV^*$ и любого m в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$.

Упражнение 3.5. Докажите правило Лейбница: $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$.

Поскольку форма $\widetilde{f}$ симметрична, аргументы в среднем члене формулы (3-12) можно писать в любом порядке. Условимся для упрощения обозначений писать $\widetilde{f}(u^m, w^{n-m})$, когда какие-то m аргументов формы $\widetilde{f}$ равны u, а остальные $(n - m)$ равны w (не важно в каком порядке). Из полилинейности и симметричности $\widetilde{f}$ дословно тем же рассуждением, что и формула Ньютона для раскрытия скобок в биноме $(u + w)^n$, выводится равенство

$$\widetilde{f}(u + w,\, u + w,\, \dots,\, u + w) = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \widetilde{f}(u^m, w^{n-m})\,,$$

где $n = \deg f$. С учётом (3-12) его можно переписать как *разложение Тейлора*: для любого многочлена f и векторов u, w имеется *точное* равенство

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!}\, \partial_w^m f(u)\,, \tag{3-13}$$

правая часть которого симметрична по u и w в силу соотношения (3-12).

Упражнение 3.6. Покажите, что значение полной поляризации многочлена $f \in S^n V^*$ на заданном наборе векторов описывается в терминах частных производных формулой

$$\widetilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n!}\, \partial_{v_1}\partial_{v_2}\, \dots\, \partial_{v_n}\, f \qquad \forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V\,.$$

3.3.1. Пример: линейный носитель многочлена $f \in S^n V^*$ определятся как минимальное подпространство $W \subset V^*$ такое, что $f \in S^n W^*$, и обозначается $\mathrm{Supp}(f)$. Очевидно, что это подпространство совпадает с линейным носителем полной поляризации $\widetilde{f} \in \mathrm{Sym}^n V^*$ многочлена f. Таким образом, по теор. 2.1 $\mathrm{Supp}(f)$ является образом отображения $V^{\otimes(n-1)} \longrightarrow V^*$ задаваемого полной свёрткой[0] с $\widetilde{f}$. Этот образ порождается всеми линейными формами, которые можно получить из f всевозможными $(n-1)$-кратными дифференцированиями вида

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \cdots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}}\, f(x)\,, \tag{3-14}$$

с $\sum m_\nu = n-1$. Вклад в коэффициент при x_i у линейной формы (3-14) даёт ровно один коэффициент многочлена f — тот, что стоит при мономе $x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d}$. Поэтому, если записать многочлен f в виде

$$f = \sum_{\nu_1+\dots+\nu_d=n} \frac{n!}{\nu_1!\nu_2!\,\cdots\,\nu_d!}\, a_{\nu_1\nu_2\dots\nu_d}\, x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2}\, \cdots\, x_d^{\nu_d}\,, \tag{3-15}$$

то линейная форма (3-14) будет иметь вид

$$n! \cdot \sum_{i=1}^{d} a_{m_1\dots m_{i-1}(m_i+1)m_{i+1}\dots m_d} x_i \tag{3-16}$$

и всего таких форм будет $\binom{n+d-2}{d-1}$ (количество способов разложить $n-1$ в сумму d занумерованных целых неотрицательных слагаемых $m_1, m_2, \dots, m_d$). Отсюда мы получаем, например, критерий представимости многочлена в виде n-той степени линейной формы.

Предложение 3.2

Над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль однородный многочлен (3-15) тогда и только тогда является n-той степенью линейной формы, когда ранг $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (3-16), равен единице. В этом случае форма φ, такая что $\varphi^n = f$, также пропорциональна формам (3-16).

Доказательство. В самом деле, из равенства $f = \varphi^n$ вытекает, что $\mathrm{Supp}(f)$ — одномерное пространство, порождённое формой φ, и тогда все формы (3-16) пропорциональны форме φ. Наоборот, если все формы (3-16) пропорциональны друг другу, то $\mathrm{Supp}(f)$ — одномерное пространство $U = \Bbbk \cdot \psi$, порождённое какой-то формой $\psi \in V^*$. Поскольку $S^n U = \Bbbk \cdot \psi^n$ тоже одномерно, условие $f \in S^n U$ означает, что $f = \lambda\psi^n$ для некоторого $\lambda \in \Bbbk$. Если $\Bbbk$ алгебраически замкнуто, последнее равенство переписывается как $f = \varphi^n$ с $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$. □

[0]из-за симметричности тензора $\widetilde{f}$ отображения свёртки из теор. 2.1 не зависят от выбора последовательности индексов J, по которым производится свёртка

Следствие 3.1

Образ *вложения Веронезе* $\mathbb{P}(V^*) \xhookrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^n} \mathbb{P}(S^n V^*)$ является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым системой квадратных уравнений — равенством нулю всех 2×2 миноров $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (3-16). □

Например, однородный многочлен от двух переменных $f(x_0, x_1) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$ тогда и только тогда имеет вид $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$, когда $\operatorname{rk}\begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1$, что выражается системой квадратных уравнений $\det\begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$ на коэффициенты a_i многочлена f, и в этом случае $(\alpha_0 : \alpha_1) = (a_i : a_{i+1})$ для любого i, Такого что $a_i a_{i+1} \neq 0$.

3.3.2. Пример: касательные и поляры к проективной гиперповерхности. Рассмотрим проективную гиперповерхность $S \subset \mathbb{P}(V)$, заданную однородным уравнением $F(x) = 0$ степени n. Пересечение S произвольной прямой $\ell = (pq)$ состоит из таких точек $\lambda p + \mu q \in \ell$, что отношение $(\lambda : \mu)$ удовлетворяет уравнению $f(\lambda, \mu) = 0$, которое получается подстановкой $x = \lambda p + \mu q$ в уравнение гиперповерхности $F(x) = 0$. Если основное поле алгебраически замкнуто, и прямая ℓ не лежит на S целиком (что означало бы тождественное обращение $f(\lambda, \mu)$ в нуль), то ℓ пересекает S в конечном наборе точек $a_1, a_2, \dots, a_k$, причём если учитывать каждую из них с надлежащей кратностью, то сумма этих кратностей будет равна n. Для этого кратность пересечения поверхности S с прямой ℓ в точке $a_i = (\alpha_i' : \alpha_i'')$ надо определить как показатель, с которым линейный множитель

$$\det\begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha_i' & \alpha_i'' \end{pmatrix} = (\alpha_i'' \lambda - \alpha_i' \mu)$$

входит в разложение $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha_i'' \mu - \alpha_i' \lambda)^{s_i}$ однородного многочлена $f(\lambda, \mu)$ на линейные множители.

Показатель s_i называется *локальным индексом пересечения* поверхности S с прямой ℓ в точке a_i и обозначается $(S, \ell)_{a_i}$. Прямая ℓ называется *касательной* к S в точке $a \in \ell \cap S$, если $(S, \ell)_a \geqslant 2$ или $\ell \subset S$.

По формуле Тэйлора (3-13) коэффициент при $\lambda^{n-m}\mu^m$ в уравнении $f(\lambda, \mu) = 0$ равен

$$\binom{n}{m} \widetilde{f}(p^{n-m}, q^m) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial q^i}(p) = \frac{1}{(n-m)!} \frac{\partial^{n-m} F}{\partial p^{n-m}}(q)\,. \tag{3-17}$$

и если $p \in S$, то разложение Тейлора в окрестности p начинается как

$$F(p + tq) = t\binom{d}{1} \widetilde{F}(p^{n-1}, q) + t^2 \binom{d}{2} \widetilde{F}(p^{n-2}, q^2) + \;\cdots\;.$$

Таким образом, прямая pq, проходящая через точку $p \in S$, касается S в этой точке тогда и только тогда, когда $\widetilde{F}(p^{n-1}, q) = 0$.

Если $F(p^{n-1}, x) \not\equiv 0$ как линейная форма от x, то точки q, для которых прямая (pq) касается S в точке p, заметут в $\mathbb{P}(V)$ гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением $F(p^{n-1}, x) = 0$. Она называется *касательным пространством* к S в p и обозначается $T_p S$. Точка p называется в этом случае *гладкой* точкой поверхности S.

Если $F(p^{n-1}, x) \equiv 0$, то поверхность S называется *особой* в точке p, а p называется *особой точкой* поверхности S. Согласно (3-17), коэффициентами линейной формы

$$F(p^{n-1}, x) = \partial_x F(p)$$

являются частные производные от F, вычисленные в точке p, так что особость p равносильна занулению в p всех частных производных от уравнения гиперповерхности. В этом случае любая проходящая через p прямая имеет с S как минимум двукратное пересечение, и касательное пространство T_pS, понимаемое как объединение всех прямых, касающихся S в точке p, совпадает со всем пространством $\mathbb{P}(V)$.

Если q — гладкая точка на S или любая точка вне S, то замыкание множества точек касания с S всевозможных касательных, опущенных на S из точки q образует на поверхности S фигуру, называемую *контуром* поверхности S, видимым из точки q. Видимый контур высекается из S полярной к q относительно S гиперповерхностью $(n-1)$-й степени

$$\mathrm{pl}_q S = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q, y^{n-1}) = 0\}\,, \tag{3-18}$$

автоматически отличной от всего пространства. Действительно, условие касания прямой (qy) поверхности S в точке y — это $\widetilde{F}(y^{n-1}, q) = 0$. Если многочлен $G(y) = \widetilde{F}(y^{n-1}, q)$ тождественно нулевой (как многочлен от y), то, взяв $y = q$, мы получим $F(q) = 0$, откуда $q \in S$. С другой стороны, т. к. все производные от G в этом случае тоже нулевые, мы получаем равенство $\widetilde{F}(q^{n-1}, y) = \widetilde{G}(q^{n-2}, y) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial q^{n-2}} G(y) \equiv 0$, означающее, что q — особая точка поверхности S.

Гиперповерхность $\mathrm{pl}_q^{n-r} = \left\{ y \in \mathbb{P}(V) \mid \widetilde{F}(q^{n-r}, y^r) = 0 \right\}$ называется *полярой r-й степени* поверхности S относительно точки q. Если $q \in S$ — гладкая точка, то поляра первой степени — эта касательная гиперплоскость T_qS к S в точке q, а каждая поляра степени $r \geqslant 2$ — это поверхность степени r, которая проходит через q и имеет те же поляры степеней $< r$ относительно точки q, что и исходная поверхность S. Так, квадратичная поляра — это проходящая через q квадрика, имеющая в точке q ту же касательную гиперплоскость, что и S, кубическая поляра — это проходящая через q кубическая поверхность с той же касательной плоскостью и квадратичной полярой, что и S, и т. д.

3.4. Поляризация грассмановых многочленов. Хотя грассманов многочлен $\omega \in \Lambda V^*$ и не задаёт никакой функции на векторах двойственного пространства V, большая часть сказанного в предыдущем разделе имеет смысл и для грассмановых многочленов. А именно, по предл. 3.1 над полем характеристики нуль для любого однородного грассманова многочлена n-той степени $\omega \in \Lambda^n V^*$ существует единственная n-линейная кососимметричная форма $\widetilde{\omega} \in \mathrm{Skew}^{\,n} V^* \subset V^{*\otimes n}$, которая проектируется в этот многочлен при факторизации тензорной алгебры по соотношениям антикоммутирования. Эта форма (равно как и соответствующий ей кососимметрический тензор) называется *полной поляризацией* грассманова многочлена ω.

Согласно формуле (3-8) из предл. 3.1 полная поляризация базисного грассманова монома $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ равна

$$\widetilde{\omega} = \frac{1}{n!}\, e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \mathrm{alt}_n \left(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_n} \right)\,. \tag{3-19}$$

Как и в симметрическом случае, полная поляризация индуцирует двойственность между пространствами грассмановых многочленов на двойственных пространствах, при которой результатом спаривания между многочленами $\omega \in \Lambda^n V^*$ и $\tau \in \Lambda^n V$ объявляется полная свёртка их полных поляризаций $\left\langle \widetilde{\omega}\,, \widetilde{\tau} \right\rangle$.

Упражнение 3.7. Покажите, что результатом спаривания двух базисных грассмановых мономов $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ и $x_J = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ от двойственных базисных векторов пространств V и V^* (оба набора индексов I и J строго возрастают) является $1/n!$, если $i_\nu = j_\nu \; \forall \nu$, и нуль во всех остальных случаях.

3.5. Частные производные в грассмановой алгебре. Рассмотрим отображение

$$\mathrm{pl}_v : \Lambda^n V^* \longrightarrow \Lambda^{n-1} V^*\,,$$

сопоставляющее грассманову многочлену $\omega \in \Lambda^n V^*$ проекцию во внешнюю алгебру тензора, получающегося свёрткой по первому тензорному сомножителю полной поляризации $\widetilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$ с вектором $v \in V$. Оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} V^{*\otimes n} \supset \operatorname{Skew}^{n} V^* \arrow[r, "c_v^1"] \arrow[d] & \operatorname{Skew}^{(n-1)} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \arrow[d] \\ \Lambda^n V^* \arrow[r, "\mathrm{pl}_v"] & \Lambda^{n-1} V^* \end{tikzcd}$$

горизонтальные стрелки которой суть проекции во внешнюю алгебру (отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования), а верхняя горизонтальная стрелка — свёртка первого тензорного сомножителя с вектором v. По аналогии с симметрическим случаем, определим *грассманову производную* кососимметричного многочлена $\omega \in \Lambda^n V^*$ в направлении вектора $v \in V$ формулой

$$\partial_v \omega \stackrel{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \mathrm{pl}_v \omega\,.$$

Из билинейности $\mathrm{pl}_v\omega$ по v и ω мы сразу же получаем, что производная в направлении вектора $v = \sum \alpha_i e_i$ является линейной комбинацией частных производных вдоль базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i \, \partial_{e_i}\,.$$

Если ω не зависит от x_j, из определений очевидно, что $\partial_{e_j}\omega = 0$. Поэтому ненулевой вклад в производную от базисного монома $\omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n}$ дадут только дифференцирования $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \ldots, \partial_{e_{i_n}}$. Из формулы (3-19) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \ldots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы $I = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$ строго возрастающую последовательность или нет. Таким образом, частная производная грассманова монома по направлению первого слева сомножителя действует как $\partial/\partial x_{i_1}$ (т. е. просто уничтожает этот сомножитель). При дифференцировании по остальным направлениям будут появляться знаки:

$$\begin{aligned} &\partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \cdots \wedge x_{i_n} = \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = \\ &\quad = (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n} = (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \ldots x_{i_n}\,. \end{aligned}$$

Иначе говоря, дифференцирование грассманова монома по направлению k-той слева входящей в него переменной ведёт себя как $(-1)^{k-1}\partial/\partial x_{i_k}$. Удобно воспринимать это явление как *грассманово правило Лейбница*:

Упражнение 3.8. Докажите, что грассмановы частные производные удовлетворяют грассманову правилу Лейбница: $\partial_v(\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_v(\tau)$.

Поскольку $\widetilde{\omega}(u, w, *, \ldots, *) = -\widetilde{\omega}(w, u, *, \ldots, *)$ операции pl_u и pl_w антикоммутируют относительно композиции: $\mathrm{pl}_u \mathrm{pl}_w \omega = -\mathrm{pl}_w \mathrm{pl}_u \omega$. Поэтому грассмановы частные производные также *антикоммутируют*: $\partial_u \partial_w = -\partial_w \partial_u$. В частности, $\partial_v^2 \omega \equiv 0$ для любых v и ω.

3.5.1. Пример: линейный носитель грассманова многочлена $\omega \in \Lambda^n V$ определяется как минимальное подпространство $W \subset V$, такое что $\omega \in \Lambda^n W$, и обозначается $\mathrm{Supp}(\omega)$. Очевидно, что носитель ω совпадает с носителем поляризации $\widetilde{\omega}$, который по теор. 2.1 является образом отображения

$$V^{*\otimes(n-1)} \longrightarrow V\,,$$

задаваемого полной свёрткой с тензором $\widetilde{\omega}$. В виду кососимметричности тензора $\widetilde{\omega}$ различные отображения свёртки из теор. 2.1 отличаются друг от друга лишь знаком, и поэтому неважно, какую из свёрток взять. Таким образом, линейный носитель грассманова многочлена степени n порождается векторами

$$\partial_J \omega = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \ldots \partial_{j_{n-1}} \omega\,,$$

где $\partial_j = \partial_{x_j}$ и $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$ пробегает всевозможные наборы из $(n-1)$ попарно различных индексов[0]. Если разложить ω в сумму мономов

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$$

(где коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$), то вклад в $\partial_J \omega$ дадут только мономы $a_I e_I$ с $I \supset J$. В результате, с точностью до общего знака, мы получим

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i}\, e_i\,. \tag{3-20}$$

Отсюда получается, например, следующий критерий разложимости грассманова многочлена.

Предложение 3.3
Следующие условия на грассманов многочлен $\omega = \sum\limits_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ (коэффициенты $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$ кососимметричны по индексам $i_1, i_2, \dots, i_n$) эквивалентны друг другу:

(1) $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_n$ для некоторых $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$ (2) $u \wedge \omega = 0 \ \forall\, u \in \mathrm{Supp}(\omega)$

(3) $\sum\limits_{\nu=1}^{m+1} (-1)^{\nu-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_\nu} a_{i_1 \dots \widehat{i_\nu} \dots i_{m+1}} = 0$ для любых[0] $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$ и $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$.

Доказательство. Условие (1) означает, что многочлен ω лежит в самой старшей внешней степени $\Lambda^{\dim \mathrm{Supp}(\omega)}$ своей линейной оболочки $\mathrm{Supp}(\omega)$. Поэтому равносильность условий (1) и (2) вытекает из следующего общего факта:

Упражнение 3.9. Докажите, что $\omega \in \Lambda U$ тогда и только тогда однороден степени $\dim U$, когда $u \wedge \omega = 0$ для всех $u \in U$.

Формулы (3) называются *соотношениями Плюккера* и представляют собою координатную запись условия (2). В самом деле, условия (2) достаточно проверить для какой-нибудь системы векторов u, линейно порождающей пространство $\mathrm{Supp}(\omega)$. Формула (3) констатирует зануление коэффициента при $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_{n+1}}$ в $u \wedge \omega$, где u — это вектор (3-20). □

Упражнение 3.10. Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы ω от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда $\omega \wedge \omega = 0$.

[0] в силу кососимметричности грассмановых частных производных достаточно ограничиться только строго возрастающими наборами

[0] в каждом из наборов $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$ и $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$ индексы не повторяются, а «крышка» в $a_{i_1 \dots \widehat{i_\nu} \dots i_{m+1}}$ означает, что индекс i_ν следует пропустить