§2. Тензорная алгебра векторного пространства

2.1. Свободная ассоциативная алгебра $\mathsf{T}(V)$. Всюду в этом параграфе мы обозначаем через V векторное пространство над произвольным полем $\Bbbk$. Тензорное произведение

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$$

называется n-той *тензорной степенью* пространства V. Мы также полагаем, по определению,

$$V^{\otimes 0} = \Bbbk \quad \text{и} \quad V^{\otimes 1} = V\,.$$

Все тензорные степени объединяются в (бесконечномерную) прямую сумму

$$\mathsf{T}V \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geqslant 0} V^{\otimes n}\,.$$

Согласно предл. 1.2 тензорное умножение векторов задаёт на пространстве $\mathsf{T}V$ структуру ассоциативной (некоммутативной) градуированной алгебры. Если выбрать в пространстве V какой-нибудь базис $\{e_\nu\}$, то эту алгебру можно воспринимать как алгебру «многочленов» от *некоммутирующих* переменных e_ν, поскольку всевозможные некоммутативные мономы вида

$$e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes e_{\nu_m} \tag{2-1}$$

(с произвольными $m \geqslant 0$ и произвольными комбинациями номеров базисных векторов) составят, согласно лем. 1.3, базис пространства $\mathsf{T}V$ над $\Bbbk$, а перемножение мономов (2-1) состоит в приписывании их друг к другу через значок $\otimes$. Компонента $V^{\otimes n} \subset \mathsf{T}V$ при такой интерпретации будет ни чем иным, как пространством всех однородных (некоммутативных) многочленов степени n.

Алгебра $\mathsf{T}V$ называется *тензорной алгеброй* пространства V, а также *свободной ассоциативной $\Bbbk$-алгеброй*, порожденной пространством V.

Второе название обусловлено универсальным свойством вложения

$$\iota : V \hookrightarrow \mathsf{T}V \tag{2-2}$$

в качестве подпространства $V^{\otimes 1} \subset \mathsf{T}V$, аналогичным универсальному свойству базиса свободного модуля, а именно: для любой ассоциативной $\Bbbk$-алгебры A и любого $\Bbbk$-линейного отображения векторных пространств $V \xrightarrow{f} A$ существует единственный гомоморфизм алгебр $\mathsf{T}V \xrightarrow{\alpha} A$ такой, что $f = \alpha \circ \iota$. Иными словами, гомоморфизмы алгебр $\mathsf{T}V \longrightarrow A$ биективно соответствуют линейным отображениям $V \longrightarrow A$.

Упражнение 2.1. Следуя доказательству лем. 1.1 покажите, что алгебра $\mathsf{T}V$ и вложение (2-2) определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с вложением (2-2), и проверьте, что для вложения V в $\mathsf{T}V$ это универсальное свойство действительно выполнено.

2.2. Двойственность. Если пространство V конечномерно, векторные пространства $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ канонически двойственны друг другу:

$$\left(V^{\otimes n}\right)^* \simeq (V^*)^{\otimes n} \tag{2-3}$$

Спаривание между ними называется *полной сверткой* и задаётся следующим образом. Сопоставим разложимым тензорам $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$ и $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ произведение

$$\langle\, v\,,\, \xi \,\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)\,. \tag{2-4}$$

Поскольку правая часть полилинейна по каждому v_i и ξ_i, правило $v \mapsto \langle\, v\,,\,\xi\,\rangle$ корректно продолжается до линейного функционала $V^{\otimes n} \longrightarrow \Bbbk$, который, в свою очередь, полилинейно зависит от каждого ξ_i, и значит сопоставление разложимому $\xi \in V^{*\otimes n}$ такого функционала корректно продолжается до линейного отображения $V^{*\otimes n} \longrightarrow (V^{\otimes n})^*$, при котором действие разложимых «ковекторных» тензоров на разложимые «векторные» тензоры задаётся правилом (2-4).

Конечномерность существенна для проверки того, что это отображение изоморфизм. Выберем двойственные базисы

$$e_1, e_2, \dots, e_n \subset V\,, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \subset V^* \quad : \quad x_i(e_j) = \delta_{ij}$$

и рассмотрим соответствующие базисы в $V^{\otimes n}$ и $(V^*)^{\otimes n}$ из тензорных мономов

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad \text{и} \quad x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \cdots \otimes x_{j_s}\,.$$

Из (2-4) немедленно вытекает, что они двойственны друг другу.

Из универсального свойства тензорного произведения $V^{\otimes n}$ тавтологиччески получается ещё одна двойственность — пространство $(V^{\otimes n})^*$ линейных отображений $V^{\otimes n} \longrightarrow \Bbbk$ канонически изоморфно пространству n-линейных форм $\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \longrightarrow \Bbbk$:

$$\left(V^{\otimes n}\right)^* \simeq \mathrm{Hom}(V, \dots, V\,;\,\Bbbk)\,. \tag{2-5}$$

Комбинируя изоморфизмы (2-3) и (2-5) получаем канонический изоморфизм

$$(V^*)^{\otimes n} \simeq \mathrm{Hom}(V, \dots, V\,;\,\Bbbk)\,, \tag{2-6}$$

который сопоставляет разложимому тензору $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$ n-линейную форму

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto \prod_{i=1}^{n} \xi_i(v_i)$$

на $V \times V \times \cdots \times V$ со значениями в поле $\Bbbk$.

2.3. Частичные свертки. Зафиксируем какие-нибудь два инъективных (но не обязательно монотонных) отображения

$$\{1, 2, \dots, p\} \xhookleftarrow{I} \{1, 2, \dots, m\} \xhookrightarrow{J} \{1, 2, \dots, q\}$$

и будем, как обычно, писать i_ν и j_ν вместо $I(\nu)$ и $J(\nu)$. Образы этих отображений суть упорядоченные (но не обязательно монотонные) наборы неповторяющихся индексов $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$, $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, состоящие из одинакового числа элементов. Линейный оператор

$$\begin{gathered}
\underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q} \xrightarrow{c^I_J} \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p-m} \otimes \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{q-m} \\
\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_q \longmapsto \prod_{\nu=1}^{m} \xi_{i_\nu}(v_{j_\nu}) \cdot \big(\bigotimes_{i \notin I} \xi_i\big) \otimes \big(\bigotimes_{j \notin J} v_j\big)
\end{gathered} \tag{2-7}$$

называется *частичной сверткой* по индексам I и J. Подчеркнём, что при разных выборах отображений I и J будут, как правило, получаться *различные* отображения свёртки.

2.3.1. Пример: свертка вектора с полилинейной формой. Если при помощи изоморфизма (2-6) проинтерпретировать n-линейную форму $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$ как тензор из $V^{*\otimes n}$ и свернуть его по первому тензорному сомножителю с вектором $v \in V$, мы получим тензор из $V^{*\otimes(n-1)}$, который можно обратно проинтерпретировать как $(n-1)$-линейную форму на V. Полученная форма называется *внутренним произведением* v и φ и обозначается $i_v\varphi$ или $v \llcorner \varphi$.

Упражнение 2.2. Проверьте, что $i_v\varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$, т. е. внутреннее умножение на v есть не что иное, как фиксация v в качестве первого аргумента формы φ.

2.4. Линейный носитель тензора. Для заданного тензора $t \in V^{\otimes n}$ обозначим через $\mathrm{Supp}(t) \subset V$ пересечение всех векторных подпространств $U \subset V$, таких что $t \in U^{\otimes n}$. Иначе $\mathrm{Supp}(t)$ можно охарактеризовать как наименьшее по включению подпространство $U \subset V$, такое что $t \in U^{\otimes n}$, или как наименьшее по размерности подпространство с таким свойством. Это следует из того, что если $t \in U^{\otimes n}$ и $t \in W^{\otimes n}$ для некоторых подпространств $U, W \subset V$, то $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$. В самом деле, выбирая в V базис $e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$, такой что e_i образуют базис в $U \cap W$, u_j и w_k дополняют его до базисов в U и W соответственно, а v_m дополняют всё предыдущее до базиса в V, мы можем разложить t по базисным тензорным мономам, и тогда условие $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$ будет означать, что в t входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме e_i, что и утверждается.

Условие $\mathrm{Supp}(t) \neq V$ означает, что тензор t эффективно зависит от меньшего числа «координат», чем имеется в V, т. е. существует линейная замена базиса, уничтожающая часть переменных в многочлене t. Например, если $\dim \mathrm{Supp}(t) = 1$, то $t = c \cdot v^{\otimes n}$ для некоторого $c \in \Bbbk$ и $v \in V$, порождающего $\mathrm{Supp}(t)$.

Будем называть подпространство $\mathrm{Supp}(t)$ *линейным носителем* тензора t, а его размерность $\dim \mathrm{Supp}(t)$ *рангом* тензора t.

Для нахождения ранга данного тензора t желательно иметь более явное описание $\mathrm{Supp}(t)$ — например, как линейной оболочки некоторого конкретного конечного набора векторов, эффективно вычислимого по t. Одно из таких описаний можно получить при помощи свёрток. А именно, для каждого инъективного (не обязательно монотонного) отображения

$$I = (i_1, i_2, \dots, i_{n-1}) : \{1, 2, \dots, (n-1)\} \hookrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \tag{2-8}$$

рассмотрим отображение полной свёртки с тензором t

$$c_t^I : V^{*\otimes(n-1)} \xrightarrow{\xi \mapsto c^{(1,\,2,\,\dots\,,\,(n-1))}_{(i_1, i_2, \dots, i_{n-1})}(\xi \otimes t)} V \tag{2-9}$$

которое спаривает ν-й сомножитель $V^{*\otimes(n-1)}$ с i_ν-тым сомножителем t для всех $1 \leqslant \nu \leqslant (n-1)$, в результате чего тензор t превращается в линейную комбинацию векторов, стоявших в том тензорном сомножителе, который не попал в образ отображения I. Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в $\mathrm{Supp}(t)$.

Теорема 2.1
Линейный носитель $\mathrm{Supp}(t)$ линейно порождается образами отображений свёртки (2-9), возникающими при всех возможных выборах сворачиваемых индексов (2-8).

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(t) = W$. Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (2-9) линейно порождают W, достаточно доказать, что каждая линейная форма $\xi \in V^*$, которая аннулирует все подпространства $\mathrm{im}\,\left(c_t^I\right)$, аннулирует и подпространство W.

Предположим противное: пусть $\xi \in V^*$ имеет ненулевое ограничение на W, но аннулирует все $c_t^I\left(V^{*\otimes(n-1)}\right)$. Выберем в V^* такой базис $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$, чтобы $\xi_1 = \xi$, а ограничения $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ на W составляли базис в W^*. Обозначим через $w_1, w_2, \dots, w_k$ двойственный к нему базис в W и разложим t по этому базису. Значение $\xi\left(c_t^I\left(\xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}\right)\right)$ равно полной свёртке t с базисным мономом $\xi_1 \otimes \xi_{\nu_1} \otimes \xi_{\nu_2} \otimes \cdots \otimes \xi_{\nu_{n-1}}$ (по индексам, переставленным согласно отображению I), которая, в свою очередь, равна коэффициенту при соответствующем двойственном мономе из разложения t. Выбирая подходящие I, мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем w_1 мономе из разложения t. Следовательно, все эти коэффициенты нулевые, т. е. t не зависит от w_1 и, тем самым, w_1 не входит в $\mathrm{Supp}(t)$ — противоречие. □

2.5. Условия (косо) симметричности. Пусть V и U — произвольные модули над любым коммутативным кольцом K. Полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} U \tag{2-10}$$

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают.

Упражнение 2.3. Покажите, что значение кососимметричного полилинейного отображения изменяет знак при перестановке любых двух аргументов и что над кольцом, в котором $1+1$ обратимо, выполнения этого условия также и достаточно для кососимметричности.

Симметричные и кососимметричные полилинейные отображения (2-10) составляют в модуле всех полилинейных отображений $\operatorname{Hom}(V,\dots,V;U)$ подмодули, которые мы будем обозначать

$$\operatorname{Sym}^n(V,U)\,,\ \operatorname{Skew}^n(V,U)\subset\operatorname{Hom}(\underbrace{V\times V\times\,\cdots\,\times V}_{n};\,U\,)\,.$$

Взятие композиции фиксированного симметричного или кососимметричного отображения (2-10) со всевозможными линейными операторами $U\xrightarrow{F}W$ задаёт линейные отображения

$$\operatorname{Hom}(U,W)\xrightarrow{F\mapsto F\circ\varphi}\operatorname{Sym}^n(V,W)\quad\text{и}\quad\operatorname{Hom}(U,W)\xrightarrow{F\mapsto F\circ\varphi}\operatorname{Skew}^n(V,W)$$

соответственно. (Косо)симметричное полилинейное отображение (2-10) называется *универсальным*, если соответствующий оператор является изоморфизмом *для любого* модуля W.

Универсальное симметричное полилинейное отображение обозначается через

$$\underbrace{V\times V\times\,\cdots\,\times V}_{n}\xrightarrow{\ \sigma\ }S^nV \tag{2-11}$$

и называется *коммутативным произведением* векторов, а модуль S^nV, в который оно действует, называется n-той *симметрической степенью* модуля V. Произведение $\sigma(v_1,v_2,\dots,v_n)$ обычно обозначается через $v_1\cdot v_2\cdot\,\cdots\,\cdot v_n$ или просто $v_1v_2\,\dots\,v_n$.

Универсальное кососимметричное полилинейное отображение обозначается через

$$\underbrace{V\times V\times\,\cdots\,\times V}_{n}\xrightarrow{\ \alpha\ }\Lambda^nV \tag{2-12}$$

и называется *внешним произведением* векторов, а модуль Λ^nV, в который оно действует, называется n-той *внешней степенью* модуля V. Произведение $\alpha(v_1,v_2,\dots,v_n)$ принято обозначать через $v_1\wedge v_2\wedge\,\cdots\,\wedge v_n$.

Упражнение 2.4. Покажите, что S^nV и Λ^nV (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с универсальным отображением.

Существование универсальных симметричного и кососимметричного полилинейных отображений вытекает из существования тензорного произведения: симметрическая и внешняя степени модуля V являются фактор модулями тензорной степени по подмодулям, порождённым соотношениями коммутирования и антикоммутирования соответственно. Мы подробно опишем их в следующих двух разделах.

2.6. Симметрическая алгебра пространства V. Рассмотрим в тензорной алгебре $\mathsf{T}V$ пространства V двусторонний идеал $\mathscr{I}_{\mathrm{sym}}\subset\mathsf{T}V$, порождённый линейным подпространством в $V\otimes V$, натянутым на всевозможные разности

$$u\otimes w-w\otimes u\,. \tag{2-13}$$

Пересечение $\mathscr{I}_{\mathrm{sym}}\cap V^{\otimes n}$ этого идеала с однородной компонентой $V^{\otimes n}\subset\mathsf{T}V$ степени n представляет собою линейную оболочку всевозможных разностей разложимых тензоров вида

$$(\cdots\otimes v\otimes w\otimes\,\cdots)\;-\;(\cdots\otimes w\otimes v\otimes\,\cdots) \tag{2-14}$$

(обозначенные многоточиями фрагменты не меняются), а весь идеал является прямой сумой таких однородных компонент:

$$\mathscr{I}_{\mathrm{sym}} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \left(\mathscr{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n}\right) .$$

Фактор алгебра $SV \overset{\mathrm{def}}{=} \mathsf{T}V/\mathscr{I}_{\mathrm{sym}}$ называется *симметрической алгеброй* векторного пространства V, а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой (которую принято опускать). Симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n\geqslant 0} S^n V \ , \quad \text{где} \quad S^n V \overset{\mathrm{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathscr{I}_{\mathrm{sym}} \cap V^{\otimes n}) \ .$$

Если зафиксировать базис $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$, то алгебру SV можно отождествить с алгеброй $\Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ обычных коммутативных многочленов от базисных векторов e_i, а подпространство $S^n V \subset \Bbbk[e_1, e_2, \dots, e_d]$ — с пространством однородных полиномов степени n.

Упражнение 2.5. Найдите $\dim S^n V$.

Предложение 2.1
Композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathscr{I}_{\mathrm{sym}}$:

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} S^n(V) \tag{2-15}$$

является универсальной симметрической полилинейной формой.

Доказательство. Любое полилинейное отображение $V \times V \times \cdots \times V \xrightarrow{\varphi} W$ единственным образом разлагается в композицию $\varphi = F \circ \tau$, где $V^{\otimes n} \xrightarrow{F} W$ линейно. При этом F пропускается через π тогда и только тогда, когда $F(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) = F(\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots)$, что равносильно тому что $\varphi(\dots, v, w, \dots) = \varphi(\dots, w, v, \dots)$. $\square$

Упражнение 2.6. Убедитесь, что SV является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой модулем V, в том смысле, что для любых коммутативной K-алгебры A и линейного отображения K-модулей $V \xrightarrow{f} A$ существует единственный гомоморфизм K-алгебр $SV \xrightarrow{\alpha} A$ такой, что $f = \alpha \circ \iota$, где $\iota : V \hookrightarrow SV$ вкладывает V в SV в качестве многочленов первой степени. Проверьте также, что SV и ι определяются этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с ι.

2.7. Внешняя алгебра пространства $\boldsymbol{V}$ определяется как фактор алгебра

$$\Lambda V \overset{\mathrm{def}}{=} \mathsf{T}V/\mathscr{I}_{\mathrm{skew}}$$

свободной ассоциативной алгебры $\mathsf{T}V$ по двустороннему идеалу $\mathscr{I}_{\mathrm{skew}} \subset \mathsf{T}V$, порожденному всеми тензорами вида $v \otimes v \in V \otimes V$.

Упражнение 2.7. Покажите, что подпространство $\mathscr{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes 2}$ содержит все суммы $v \otimes w + w \otimes v$ (с любыми $v, w \in V$), и если $1+1$ обратимо в K, то и линейно порождается такими суммами.

Как и в симметричном случае, идеал $\mathscr{I}_{\mathrm{skew}}$ является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathscr{I}_{\mathrm{skew}} = \bigoplus_{n\geqslant 0} \left(\mathscr{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n}\right)$$

и его компонента n-той степени $\mathscr{I}_{\mathrm{skew}} \cap V^{\otimes n}$ является линейной оболочкой разложимых тензоров вида $(\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots)$ и по упр. 2.7 содержит все суммы вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) \ + \ (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots) . \tag{2-16}$$

Соответственно, фактор алгебра ΛV является прямой суммой подпространств

$$\Lambda^n V = V^{\otimes n}/(\mathscr{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}) .$$

Упражнение 2.8. Докажите, что композиция тензорного умножения с факторизацией по $\mathscr{I}_{\text{skew}}$

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \overset{\tau}{\dashrightarrow} V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} \Lambda^n(V) \tag{2-17}$$

является универсальным кососимметричным полилинейным отображением.

Индуцированное умножение в алгебре ΛV называется *внешним* (а также *косым* или *грассмановым*) и обозначается $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$. Согласно упр. 2.7 оно меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки.

Как и в симметрическом случае, фиксация базиса $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$ отождествляет внешнюю алгебру с алгеброй *грассмановых многочленов* от базисных векторов e_i

$$\Lambda V \xrightarrow{\sim} \Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle \ ,$$

которую мы уже рассматривали, когда занимались определителями. По построению, грассмановы переменные e_i *анти*коммутируют $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$, и всякий грассманов моном *линеен* по каждой входящей в него переменной. Таким образом, любой грассманов моном степени n с точностью до знака можно записать в виде $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ с $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leqslant d$.

Лемма 2.1
Мономы $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробегает все строго возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, d\}$, образуют базис пространства $\Lambda^n V$ однородных грассмановых мономов степени n. В частности, $\Lambda^n V = 0$ для $n > \dim V$, $\dim \Lambda^n V = \binom{d}{n}$, и $\dim \Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle = 2^d$.

Доказательство. Рассмотрим $\binom{d}{n}$-мерное векторное пространство U, базис которого состоит из символов ξ_I, где $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ пробегает все возрастающие n-элементные подмножества в $\{1, 2, \dots, d\}$. Определим кососимметрическое полилинейное отображение

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\alpha} U \ : \ (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \longmapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I \ ,$$

где $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \dots, j_{\sigma(n)})$ — это единственная *возрастающая* перестановка индексов

$$(j_1, j_2, \dots, j_n) .$$

Проверим, что построенное отображение универсально. Для любого кососимметрического полилинейного отображения

$$\underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{n} \xrightarrow{\varphi} W$$

правило $F(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})) \overset{\text{def}}{=} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$ корректно определяет единственно возможный линейный оператор $U \xrightarrow{F} W$ такой, что $\varphi = F \circ \alpha$. Поэтому имеется канонический изоморфизм между U и $\Lambda^n V$, переводящий ξ_I в $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = e_I$. □

Упражнение 2.9. Проверьте, что $f(e) \wedge g(e) = (-1)^{\deg(f) \cdot \deg(g)} g(e) \wedge f(e)$ для любых однородных многочленов $f(e), g(e) \in \Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ (в частности, многочлены, состоящие только из мономов четной степени, лежат в центре[1] грассмановой алгебры).

Упражнение 2.10. Опишите центр алгебры $\Bbbk \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$, т. е. все грассмановы полиномы, коммутирующие с *с каждым* элементом этой алгебры.

Упражнение 2.11. Для любых $U, W \subset V$ проверьте, что $S^n U \cap S^n W = S^n(U \cap W)$ в $S^n V$ и $\Lambda^n U \cap \Lambda^n W = \Lambda^n(U \cap W)$ в $\Lambda^n V$.

[1] напомню, что *центром* (некоммутативного) кольца называется множество всех элементов, коммутирующих с любыми элементами этого кольца