§1. Тензорные произведения модулей

1.1. Полилинейные отображения. Рассмотрим произвольные модули $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W над произвольным коммутативным кольцом K. Отображение φ из декартова произведения множеств V_i в множество W:

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \longrightarrow W \tag{1-1}$$

называется *полилинейным* (или *n-линейным*, когда желательно точно указать количество аргументов), если оно линейно отдельно по каждому из своих аргументов при произвольным образом зафиксированных остальных:

$$\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda\, \varphi(\dots, v', \dots) + \mu\, \varphi(\dots, v'', \dots).$$

Так, 1-линейные отображения $V \longrightarrow W$ — это линейные операторы, а 2-линейные отображения $V \times V \longrightarrow K$ — это билинейные формы на модуле V; n-линейные отображения (1-1) непосредственно обобщают эти два примера.

Полилинейные отображения (1-1) можно обычным образом складывать и умножать на числа из K, так что они тоже образуют K-модуль. Он называется *модулем полилинейных отображений* и обозначается $\mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$.

1.1.1. Пример: полилинейные отображения векторных пространств. Если $K = \Bbbk$ — это поле, и $V_1, V_2, \dots, V_n$ и W — векторные пространства размерностей $d_1, d_2, \dots, d_n$ и d соответственно, то пространство полилинейных отображений $\mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$ имеет размерность

$$\dim \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n \cdot d.$$

В самом деле, зафиксируем в каждом пространстве V_i некоторый базис $e^{(i)}_1, e^{(i)}_2, \dots, e^{(i)}_{d_i}$, и базис $e_1, e_2, \dots, e_d$ в пространстве W. Отображение (1-1) однозначно определяется своими значениями

$$\varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big) \in W \tag{1-2}$$

на всевозможных сочетаниях базисных векторов из пространств V_i, поскольку для произвольного набора векторов $v_1, v_2, \dots, v_n$, разложения которых по базисам имеют вид

$$v_i = \sum_{\alpha_i = 1}^{d_i} x^{(i)}_{\alpha_i}\, e^{(i)}_{\alpha_i}, \tag{1-3}$$

мы в силу полилинейности отображения φ получим

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \cdot \varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big). \tag{1-4}$$

Раскладывая векторы (1-2) по базису пространства W:

$$\varphi\big(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\big) = \sum_{\nu=1}^{d} a_\nu^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot e^\nu,$$

мы можем однозначно закодировать полилинейное отображение φ набором из $d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_n \cdot d$ чисел $a_\nu^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \in \Bbbk$, которые естественно организуются в $(n+1)$-мерную матрицу[1] размера $d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n \times d$. Формула (1-4) переписывается через эти матричные элементы как

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\nu, \alpha_1, \dots, \alpha_n} a_\nu^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot x^{(1)}_{\alpha_1} \cdot x^{(2)}_{\alpha_2} \cdot \dots \cdot x^{(n)}_{\alpha_n} \cdot e_\nu.$$

[1] при $n = 1$ получается обычная 2-мерная матрица (1-) линейного отображения $V \longrightarrow W$ размера $k \times m$, где $k = \dim V$, $m = \dim W$

При сложении полилинейных отображений и умножении их на числа соответствующие этим отображениям матрицы поэлементно складываются и умножаются на числа. Таким образом, пространство полилинейных отображений изоморфно пространству многомерных матриц, и базису пространства матриц, состоящему из матриц с единицей в позиции $(i_1, i_2, \dots, i_n, j)$ и нулями в остальных местах отвечает базис пространства полилинейных отображений, состоящий из отображений $\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)}$, действующих на набор векторов (1-3) по правилу

$$\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} : (v_1, v_2, \dots, v_n) \longmapsto x^{(1)}_{i_1} \cdot x^{(2)}_{i_2} \cdot \;\cdots\; \cdot x^{(n)}_{i_n} \cdot e_j\,, \tag{1-5}$$

а на базисные векторы (1-3) по — правилу

$$\delta^j_{(i_1,i_2,\dots,i_n)} : \left(e^{(1)}_{\alpha_1}, e^{(2)}_{\alpha_2}, \dots, e^{(n)}_{\alpha_n}\right) \longmapsto \begin{cases} e_j\,, & \text{если } \alpha_k = i_k \text{ при всех } k = 1, \dots, n\,, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1-6}$$

Разумеется, если в предыдущих рассуждениях всюду заменить слова «размерность» и «векторное пространство» словами «ранг» и «свободный модуль», то всё сказанное останется в силе для любых *свободных* модулей (конечного ранга) над произвольным коммутативным кольцом K.

1.2. Универсальное полилинейное отображение. Рассмотрим какое-нибудь полилинейное отображение модулей

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} U\,. \tag{1-7}$$

Взятие композиции этого отображения со всевозможными линейными операторами $U \xrightarrow{F} W$ в какой-нибудь модуль W задаёт *линейное* отображение модулей

$$\mathrm{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F\circ\tau} \mathrm{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) \tag{1-8}$$

из пространства $\mathrm{Hom}(U, W)$ линейных операторов $U \xrightarrow{F} W$ в пространство полилинейных отображений $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$.

Определение 1.1
Полилинейное отображение (1-7) называется *универсальным*, если *для каждого* модуля W линейный оператор (1-8) является изоморфизмом.

Иначе говоря, полилинейное отображение τ универсально, если для любого модуля W и любого полилинейного отображения $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$ существует единственный линейный оператор $U \xrightarrow{F} W$ такой, что $\varphi = F\circ\tau$, т. е. пара *полилинейных* сплошных стрелок в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dd, dashed, "F"] \\ V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ur, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\ & W \end{tikzcd}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник *единственным* пунктирным *линейным* отображением.

Лемма 1.1
Для любых двух универсальных полилинейных отображений

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_1} U_1 \quad \text{и} \quad V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau_2} U_2$$

существует единственный линейный изоморфизм $U_1 \xrightarrow{\iota} U_2$ такой, что $\tau_2 = \iota\tau_1$.

Доказательство. Поскольку и U_1, и U_2 оба универсальны, существуют единственные линейные операторы $U_1 \xrightarrow{F_{21}} U_2$ и $U_2 \xrightarrow{F_{12}} U_1$, которые встраиваются в коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"] & & U_1 \arrow[dd, dashed, "F_{21}"] \\
& V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[ul, "\tau_1"'] \arrow[ur, "\tau_1"] \arrow[dl, "\tau_2"] \arrow[dr, "\tau_2"'] & \\
U_2 \arrow[uu, dashed, "F_{12}"] \arrow[rr, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"'] & & U_2
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
U_1 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_1}"'] \arrow[dr, dotted, "F_{21}"] & & & & U_2 \arrow[dd, equal, "\mathrm{Id}_{U_2}"] \arrow[dl, dotted, "F_{12}"'] \\
& U_2 \arrow[dl, dotted, "F_{12}"] & V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \arrow[l, "\tau_2"'] \arrow[r, "\tau_1"] \arrow[ull, "\tau_1"'] \arrow[dll, "\tau_1"] \arrow[urr, "\tau_2"] \arrow[drr, "\tau_2"'] & U_1 \arrow[dr, dotted, "F_{21}"'] & \\
U_1 & & & & U_2
\end{tikzcd}$$

Обе композиции $F_{21}F_{12} = \mathrm{Id}_{U_2}$, $F_{12}F_{21} = \mathrm{Id}_{U_1}$, поскольку представления самих универсальных полилинейных отображений в виде $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ и $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$ в силу единственности таковых представлений возможны только с $\varphi = \mathrm{Id}_{U_1}$, $\psi = \mathrm{Id}_{U_2}$. □

1.3. Тензорное произведение модулей. Универсальное полилинейное отображение обозначается через

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \tag{1-9}$$

и называется *тензорным произведением векторов*. Значение универсального полилинейного отображения на заданном наборе векторов обозначается через

$$\tau(v_1, v_2, \ldots, v_n) = v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n\,. \tag{1-10}$$

Единственный с точностью до единственного изоморфизма, перестановочного с тензорным произведением векторов, модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называется *тензорным произведением* модулей $V_1, V_2, \ldots, V_n$. Элементы пространства $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ называются *тензорами*. Тензоры, лежащие в образе универсального полилинейного отображения (1-9) называются *разложимыми*.

Упражнение 1.1. Выведите из универсального свойства тензорного произведения, что разложимые тензоры линейно порождают модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$.

Отметим, что наугад взятый тензор обычно неразложим и является линейной комбинацией мономов (1-10), а разложимость означает возможность преобразовать эту линейную комбинацию к одному моному (разложить её на множители). Кроме того, поскольку отображение (1-9) не линейно, а полилинейно, его образ обычно не является подмодулем. Мы ещё обсудим это в n° 1.3.2 и n° 1.4, а сейчас устраним один существенный логический пробел в наших построениях.

Для того, чтобы понятие тензорного произведения сделалось содержательным, необходимо доказать, что универсальное полилинейное отображение (1-9) *существует* — само по себе определение универсального полилинейного отображения обеспечивает лишь единственность определяемого объекта (при условии что он есть), но не даёт *никаких* гарантий его существования.

Мы построим модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ при помощи образующих и соотношений. А именно, рассмотрим свободный K-модуль $\mathscr{V}$, базисом в котором по определению являются всевозможные слова $[v_1 v_2 \ldots v_n]$ с произвольными $v_i \in V_i$. В этом большом модуле рассмотрим подмодуль $\mathscr{R} \subset \mathscr{V}$, порождённый всевозможными трёхчленными линейными комбинациями вида

$$[v_1 \ldots v_{i-1}(\lambda u + \mu w)v_{i+1} \ldots v_n] - \lambda\,[v_1 \ldots v_{i-1} u v_{i+1} \ldots v_n] - \mu\,[v_1 \ldots v_{i-1} w v_{i+1} \ldots v_n]\,, \tag{1-11}$$

где обозначенные многоточиями фрагменты не меняются. Положим, по определению

$$\begin{gathered} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \mathscr{V}/\mathscr{R} \\ v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n = [w_1 w_2 \ldots w_n] \,(\mathrm{mod}\, \mathscr{R})\,. \end{gathered} \tag{1-12}$$

Иными словами, $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ есть модуль, образованный конечными K-линейными комбинациями формальных тензорных мономов $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ (где $v_i \in V_i$), которые подчиняются соотношениям дистрибутивности: если любой из сомножителей (при фиксированных остальных) записать в виде линейной комбинации векторов, то полученное произведение можно преобразовать по стандартному правилу для раскрытия скобок:

$$\cdots \otimes (\lambda u + \mu w) \otimes \cdots = \lambda \cdot (\cdots \otimes u \otimes \cdots) - \mu (\cdots \otimes w \otimes \cdots) . \tag{1-13}$$

Лемма 1.2
Отображение $\tau : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{(v_1,v_2,\dots,v_n)\mapsto v_1 v_2 \dots v_n \pmod{\mathscr{R}}} \mathscr{V}/\mathscr{R}$ является универсальным полилинейным отображением.

Доказательство. Полилинейность отображения τ тавтологически следует из наложенных нами соотношений и выражается в точности формулой (1-13). Проверим его универсальность. Для любого отображения множеств

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$$

существует единственное линейное отображение $F : \mathscr{V} \longrightarrow W$, переводящее базисный вектор $[v_1 v_2 \dots v_n] \in \mathscr{V}$ в $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$. Для того, чтобы это отображение было корректно определено на фактор модуле $\mathscr{V}/\mathscr{R}$, достаточно проверить, что $\mathscr{R} \subset \ker F$. Это следует из полилинейности φ и линейности F : для каждого соотношения (1-11) имеем

$$\begin{aligned} F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots] - \lambda\,[\dots u\dots] - \mu\,[\dots w\dots]\big) &= \\ = F\big([\dots(\lambda u + \mu w)\dots]\big) - \lambda\,F\big([\dots u\dots]\big) - \mu\,F\big([\dots w\dots]\big) &= \\ = \varphi(\dots, (\lambda u + \mu w), \dots) - \lambda\,\varphi(\dots, u, \dots) - \mu\,\varphi(\dots, w, \dots) &= 0 , \end{aligned}$$

что и требовалось. □

Лемма 1.3
Если каждый из модулей V_i свободен с базисом $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$, то модуль $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ также свободен с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)} , \quad 1 \leqslant \alpha_i \leqslant d_i , \tag{1-14}$$

(в частности, $\operatorname{rk} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n = \prod \operatorname{rk} V_i$).

Доказательство. Обозначим через $\mathscr{W}$ свободный модуль, базисом которого, по определению, являются всевозможные выражения (1-14), которые мы временно будем воспринимать просто как формальные символы. Полилинейное отображение $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\tau} \mathscr{W}$, переводящее каждый набор базисных векторов $\big(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)} \big) \in V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n$ в соответствующий базисный символ (1-14), является универсальным, поскольку для любого полилинейного отображения

$$V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \xrightarrow{\varphi} W$$

и линейного отображения $\mathscr{W} \xrightarrow{F} W$ равенство $\varphi = F \circ \tau$ однозначно задаёт действие F на каждый базисный вектор: $F(e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}) = \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)})$ и тем самым однозначно задаёт F. По лем. 1.1 имеется единственный изоморфизм $\mathscr{W} \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, переводящий формальные базисные векторы (1-14) пространства $\mathscr{W}$ в соответствующие тензорные произведения базисных векторов, лежащие в $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$. Тем самым, последние тоже образуют базис. □

1.3.1. Замечание о бесконечномерных пространствах. Последняя лемма сохраняет силу для произведений свободных модулей бесконечного ранга: дословно то же рассуждение показывает, что векторное пространство, состоящее из всевозможных конечных линейных комбинаций базисных мономов (1-14) (которых в бесконечномерном случае будет бесконечно много) обладает требуемым универсальным свойством.

В качестве примера рассмотрим пространства многочленов $V_i = \Bbbk[x_i]$. В этом случае имеется изоморфизм векторных пространств

$$\Bbbk[x_1] \otimes \Bbbk[x_2] \otimes \cdots \otimes \Bbbk[x_n] \simeq \Bbbk[x_1, x_2, \dots, x_n]\,,$$

сопоставляющий каждому базисному произведению $x_1^{m_1} \otimes x_2^{m_2} \otimes \cdots \otimes x_n^{m_n}$ обычный моном $x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n}$.

1.3.2. Пример: многообразия Сегре. Пусть $K = \Bbbk$ — поле, и $V_1, V_2, \dots, V_n$ — векторные пространства над ним. Из лем. 1.3 вытекает, что пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ линейно порождается разложимыми тензорами. При этом само множество разложимых тензоров, как уже говорилось, векторным пространством, скорее всего, не является и образует внутри $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ некое нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*.

А именно, рассмотрим *отображение Сегре* из прямого произведения проективных пространств $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$ в проективное пространство $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}\left(V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n\right)$:

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \cdots \times \mathbb{P}_{m_n} \longrightarrow \mathbb{P}_m\,,$$

переводящее набор одномерных подпространств, порождённых ненулевыми векторами $v_i \in V_i$, в одномерное подпространство, порождённое разложимым тензором $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$.

Упражнение 1.2. Проверьте, что это отображение корректно определено[1] и является вложением.

Образ отображения Сегре называется *многообразием Сегре*. При $\Bbbk = \mathbb{R}$ многообразие Сегре является гладким[1] подмногообразием размерности $m_1 m_2 \dots m_n$ в проективном пространстве размерности $m = \prod(m_i + 1) - 1$, которая обычно сильно больше размерности многообразия Сегре. При этом многообразие Сегре не содержится ни в какой гиперплоскости и заметается n семействами проективных пространств.

Следующий частный случай этой конструкции встречается особенно часто.

1.4. Изоморфизм $U^* \otimes V \simeq \mathrm{Hom}(U, V)$ и разложимые операторы. Для любых двух векторных пространств U и W имеется билинейное отображение

$$U^* \times W \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, V)\,,$$

сопоставляющее паре $(\xi, w) \in U^* \times W$ линейное отображение $U \longrightarrow W$, действующее по правилу

$$U \ni u \longmapsto \xi(u)\, w \in W\,. \tag{1-15}$$

Это оператор ранга 1, образом которого является 1-мерное подпространство в W, натянутое на вектор w, а ядром — подпространство $\mathrm{Ann}\,(\xi) \subset U$ коразмерности 1.

Упражнение 1.3. Покажите, что всякий оператор $F : U \longrightarrow W$ ранга 1 представляется в виде (1-15) с подходящими $\xi \in U^*$ и $w \in W$.

В силу универсальности тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$U^* \otimes V \longrightarrow \mathrm{Hom}(U, V) \tag{1-16}$$

переводящее каждый разложимый тензор $\xi \otimes w$ в оператор (1-15). Если оба пространства U и V конечномерны, то это отображение является изоморфизмом. Чтобы убедиться в этом, зафиксируем в пространствах U и W базисы $u_1, u_2, \dots, u_n$ и $w_1, w_2, \dots, w_m$. Тогда mn разложимых тензоров $u_i^* \otimes w_j$ (где $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in U^*$ составляют двойственный к $u_1, u_2, \dots, u_n$ базис пространства

[1] т. е. тензор $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$ отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов v_i на пропорциональные

[1] в стандартном дифференциально-геометрическом понимании

U^*) образуют, согласно лем. 1.2, базис тензорного произведения $U^* \otimes V$, а соответствующие им операторы будут действовать на базисные векторы пространства U по правилу

$$u_i^* \otimes w_j : u_k \longmapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

Иначе говоря, матрица оператора $u_i^* \otimes w_j$ в выбранных нами базисах — это стандартная базисная матрица с единицей в пересечении j-той строки и i-того столбца и с нулями в остальных местах. Таким образом, стандартный базис тензорного произведения $U^* \otimes V$ переводится в стандартный базис пространства операторов.

На геометрическом языке операторы ранга 1, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, составляют многообразие Сегре

$$S \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W)) .$$

Оно линейно порождает всё пространство $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$. Если использовать в качестве однородных координат на $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(V, W))$ матричные элементы (a_{ij}) операторов в каких-нибудь фиксированных базисах, то многообразие Сегре можно задать в этих координатах системой квадратичных уравнений — обращением в нуль всех миноров второго порядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0 .$$

Отображение Сегре $\mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(U, W))$, переводящее пару точек (ξ, w) в точку $\xi \otimes w$, устанавливает биекцию между произведением проективных пространств и многообразием Сегре. Оно переводит пару точек с однородными координатами $(x_1 : x_2 : \cdots : x_n)$ и $(y_1 : y_2 : \cdots : y_n)$ в точку, однородными координатами которой являются mn всевозможных произведений $x_j y_i$, т. е. матрица $y^t \cdot x$ ранга 1 (произведение столбца y на строку x) . Два семейства «координатных плоскостей» $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$ и $\mathbb{P}_{n-1} \times w$ при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заметающих многообразие Сегре.

При $\dim U = \dim W = 2$ мы получаем в точности обсуждавшуюся в курсе геометрии биекцию между $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ и детерминантной квадрикой Сегре в $\mathbb{P}_3$.

1.5. Тензорные произведения абелевых групп. Для произвольных модулей V_i над произвольным кольцом K из данного в n° 1.3 описания модуля $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ при помощи образующих и соотношений не очевидно ни его строение, ни даже отличен он от нуля или нет.

Проиллюстрируем это на примере вычисления тензорных произведений конечно порождённых $\mathbb{Z}$-модулей. Обозначим для краткости через $\mathbb{Z}_n$ аддитивную абелеву группу вычетов $\mathbb{Z}/(n)$, рассматриваемую как модуль над кольцом $\mathbb{Z}$. Покажем, что при взаимно простых m и n произведение $\mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n = 0$, где мы обозначаем через 0 тривиальный модуль, состоящий из одного только нулевого вектора.

В самом деле, при $\text{нод}(m, n) = 1$ класс $[n]_m \in \mathbb{Z}_m$ обратим в кольце $\mathbb{Z}/(m)$, и каждое число $a \in \mathbb{Z}_m$ представляется в виде $a = n \cdot a'$, где $a' = [n]^{-1}a$. С другой стороны, для любого $b \in \mathbb{Z}_n$ произведение $nb = 0$ в $\mathbb{Z}_n$. Поэтому в силу полилинейности тензорного произведения мы для любого разложимого тензора $a \otimes b \in \mathbb{Z}_m \otimes \mathbb{Z}_n$ имеем равенство

$$a \otimes b = (n \cdot a') \otimes b = n \cdot (a' \otimes b) = a' \otimes (n \cdot b) = \alpha' \otimes 0 = \alpha' \otimes (0 \cdot 0) = 0 \cdot (\alpha' \otimes 0) = 0 ,$$

а поскольку разложимые тензоры линейно порождают тензорное произведение, оно нулевое.

Вычислим теперь тензорное произведение $\mathbb{Z}_{p^n} \otimes \mathbb{Z}_{p^m}$ при $n \leqslant m$. Отображение

$$\mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{p^m} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}_{p^n} ,$$

переводящее пару вычетов $([a]_{p^n}, [b]_{p^m})$ в вычет $[ab]_{p^n} = ab \cdot [1]_{p^n}$ билинейно. Покажем, что оно универсально. Для любого билинейного отображения $\mathbb{Z}_{p^n} \times \mathbb{Z}_{p^m} \xrightarrow{\varphi} W$ выполняется равенство

$$\varphi([a]_{p^n}, [b]_{p^m}) = ab \cdot \varphi\left([1]_{p^n}, [1]_{p^m}\right) ,$$

из которого вытекает, что линейное отображение $F : \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow W$, такое что $\varphi = F \circ \mu$, обязано переводить образующий элемент $[1]_{p^n} \in \mathbb{Z}_{p^n}$ в $\varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m})$. Таким образом, отображение F единственно, если существует. Так как единственным соотношением на элемент $e = [1]_{p^n} \in \mathbb{Z}_{p^n}$ является равенство $p^n \cdot e = 0$, которому элемент $\varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m})$ удовлетворяет, поскольку

$$p^n \cdot \varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m}) = \varphi(p^n \cdot [1]_{p^n}, [1]_{p^m}) = \varphi(0, [1]_{p^m}) = 0\,,$$

мы заключаем, что правило $[1]_{p^n} \longmapsto \varphi([1]_{p^n}, [1]_{p^m})$ корректно определяет отображение

$$F : \mathbb{Z}_{p^n} \longrightarrow W\,,$$

что и доказывает универсальность. Таким образом,

$$\mathbb{Z}_{p^n} \otimes \mathbb{Z}_{p^m} \simeq \mathbb{Z}_{p^{\min(n,m)}}\,.$$

Упражнение 1.4. Покажите, что $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_n \simeq \mathbb{Z}_n$ для любого n.

Вычисление тензорных произведений произвольных конечно порождённых абелевых групп сводится к только что рассмотренным случаям при помощи канонических изоморфизмов коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности, обсуждаемых ниже.

1.6. Канонические изоморфизмы. Всюду далее речь будет идти о произвольных модулях над любым коммутативным кольцом K. Линейные отображения из тензорного произведения таких модулей в какой-нибудь модуль W

$$f : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \longrightarrow W \tag{1-17}$$

отображение часто бывает удобно задавать на множестве разложимых векторов $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n$, т. е. указывая значения

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto f(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,, \tag{1-18}$$

а затем продолжая его на произвольные тензоры (т. е. на линейные комбинации разложимых тензоров) по линейности. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$, такое описание однозначно определяет f при условии, что оно корректно: множество разложимых тензоров, как правило, линейно зависимо[2], и все имеющиеся между ними линейные соотношения должны выполняться и между векторами (1-18) в модуле W. Эти соотношения линейно порождаются соотношениями полилинейности (или дистрибутивности) (1-13). Таким образом, мы получаем следующий удобный критерий:

Лемма 1.4

Если векторы $f(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ в (1-18) полилинейно зависят от векторов v_i (т. е. линейны по каждому v_i при фиксированных остальных), то существует единственное линейное отображение (1-17), действующее на разложимые тензоры по правилу

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \longmapsto f(v_1, v_2, \ldots, v_n)\,.$$

Предложение 1.1

Имеется канонический изоморфизм $U \otimes W \simeq W \otimes U$, переводящий разложимый тензор $u \otimes w$ в $w \otimes u$.

Доказательство. Правило $u \otimes w \longmapsto w \otimes u$ билинейно по u, w и по лем. 1.4 корректно определяет линейное отображение $U \otimes W \longrightarrow W \otimes U$. По тем же причинам существует линейное отображение $W \otimes U \longrightarrow U \otimes W$, переводящее $w \otimes u$ в $u \otimes w$. Эти два отображения обратны друг другу (поскольку обе их композиции тождественно действуют на разложимых тензорах, линейно порождающих тензорное произведение), и значит, являются изоморфизмами. □

[2] например, если K — бесконечное поле, а V_i — конечномерные пространства, пространство $V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n$ тоже конечномерно, а разложимых тензоров в нём бесконечно много

Предложение 1.2
Имеются канонические изоморфизмы $V\otimes(U\otimes W)\simeq V\otimes U\otimes W\simeq(V\otimes U)\otimes W$, переводящие друг в друга разложимые тензоры $v\otimes(u\otimes w)$, $v\otimes u\otimes w$ и $(v\otimes u)\otimes w$.

Доказательство. Тензор $v\otimes(u\otimes w)\in V\otimes(U\otimes W)$ трилинейно зависит от (v,u,w). Следовательно, по лем. 1.4 имеется линейное отображение $V\otimes U\otimes W\longrightarrow V\otimes(U\otimes W)$, переводящее $v\otimes u\otimes w$ в $v\otimes(u\otimes w)$. Обратное отображение строится в два шага. При каждом $v\in V$ тензор $v\otimes u\otimes w$ билинейно зависит от u и w, и значит, по лем. 1.4 мы имеем линейное отображение

$$\tau_v: U\otimes W\xrightarrow{u\otimes w\mapsto v\otimes u\otimes w} V\otimes U\otimes W\,,$$

которое само по себе линейно зависит от v, т. е. тензор $\tau_v(t)=v\otimes t$ билинеен по $v\in V$ и $t\in U\otimes W$. По лем. 1.4 существует линейное отображение $V\otimes(U\otimes W)\longrightarrow V\otimes U\otimes W$, переводящее $v\otimes(u\otimes w)$ в $v\otimes u\otimes w$, что и требовалось. Изоморфизм между $V\otimes U\otimes W$ и $(V\otimes U)\otimes W$ устанавливается аналогично. $\square$

Предложение 1.3
Имеются канонические изоморфизмы

$$V\otimes(U\oplus W)\simeq(V\otimes U)\oplus(V\otimes W)\quad\text{и}\quad(U\oplus W)\otimes V\simeq(U\otimes V)\oplus(W\otimes V)\,,$$

действующие на разложимые тензоры по правилам:

$$v\otimes(u\dotplus w)\leftrightarrows(v\otimes u)\dotplus(v\otimes w)\quad\text{и}\quad(u\dotplus w)\otimes v\leftrightarrows(u\otimes v)\dotplus(w\otimes v)$$

где через $a\dotplus b$ для $a\in A$ и $b\in B$ обозначено сложение элементов $(a,0)$ и $(0,b)$ в прямой сумме модулей $A\oplus B$.

Доказательство. Достаточно построить первый изоморфизм — второй получится из него применением предл. 1.1. Отображение $V\otimes(U\oplus W)\xrightarrow{v\otimes(u\dotplus w)\mapsto(v\otimes u)\dotplus(v\otimes w)}(V\otimes U)\oplus(V\otimes W)$ существует, поскольку $(v\otimes u)\dotplus(v\otimes w)$ билинеен по v и $u\dotplus w$. Обратное отображение снова строится в два шага: сначала убеждаемся в наличии линейных отображений

$$\varphi_1: V\otimes U\longrightarrow V\otimes(U\oplus W)\quad\text{и}\quad\varphi_2: V\otimes W\longrightarrow V\otimes(U\oplus W)\,,$$

действующих на разложимые тензоры по правилам $v\otimes u\mapsto v\otimes(u\dotplus 0)$ и $v\otimes w\mapsto v\otimes(0\dotplus w)$, затем комбинируем их в отображение $\psi:(V\otimes U)\oplus(V\otimes W)\xrightarrow{a\dotplus b\mapsto\varphi_1(a)+\varphi_2(b)}V\otimes(U\oplus W)$, которое, очевидно, линейно и обратно к построенному в начале доказательства. $\square$