Письменный экзамен за четвёртый модуль (вторая попытка)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оцениваются в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет.

Задача 1. При каких n примитивный $\sqrt[n]{1}$ имеет степень 2 над $\mathbb{Q}$?

Задача 2. Для модуля M над коммутативным кольцом K положим

$$\operatorname{Ann}(M) = \{x \in K \mid xM = 0\}.$$

Верно ли, что если K-модуль M нётеров, то фактор кольцо $K/\operatorname{Ann}(M)$ тоже нётерово?

Задача 3. Пусть $\zeta = e^{2\pi i/5}$. Обозначим через $\operatorname{tr}(xy)$ след оператора умножения на элемент xy в поле $\mathbb{Q}[\zeta]$. Укажите состоящий из степеней ζ^m базис поля $\mathbb{Q}[\zeta]$ как векторного пространства над $\mathbb{Q}$, вычислите матрицу Грама билинейной формы $\operatorname{tr}(xy)$ в этом базисе и найдите двойственный относительно формы следа базис.

Задача 4. Какие корни из единицы содержатся в поле $\mathbb{Q}[\sqrt{-5}]$?

Задача 5. Опишите все подполя в поле $\mathbb{K} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{5}]$, выясните, есть ли среди этих подполей изоморфные и какие из подполей являются расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$ (в частности, является ли расширением Галуа само поле $\mathbb{K}$).

Задача 6. Найдите группу Галуа поля разложения многочлена $x^3 - x - 1$ над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{-23}]$.