Письменный экзамен за четвёртый модуль

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оцениваются в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет.

Задача 1. При каких n многочлен $x^{2n} + x^n + 1$ приводим в $\mathbb{F}_2[x]$?

Задача 2. Модуль M над коммутативным кольцом K называется *нётеровым*, если любой его подмодуль конечно порождён. Верно ли, что всякий сюрьективный K-линейный эндоморфизм

$$\varphi : M \twoheadrightarrow M$$

нётерова модуля M является изоморфизмом?

Задача 3. Опишите кольцо целых чисел поля $\mathbb{Q}[\sqrt[7]{1}]$.

Задача 4. Может ли конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ содержать бесконечно много корней из единицы?

Задача 5. Опишите все подполя в поле $\mathbb{Q}[\omega, \sqrt[3]{5}]$, где $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, и выясните, какие из них являются расширениями Галуа поля $\mathbb{Q}$, а какие — изоморфны между собою.

Задача 6. Найдите группу Галуа поля разложения многочлена $x^3 - 3\,x + 1$ над $\mathbb{Q}$.