

## Письменный зачёт за второй и третий модули (вторая попытка)

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оцениваются в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет.

**Задача 1.** Имеются краски  $n$  различных цветов. Каждое ребро проволочного каркаса правильного тетраэдра окрашивается какой-нибудь одной из них (при этом разные рёбра могут оказаться окрашенными одинаково). Сколько разных крашенных тетраэдров можно таким образом получить?

**Задача 2.** Сколько существует неизоморфных неабелевых групп порядка 21?

**Задача 3.** Для какой-нибудь одной группы из предыдущей задачи перечислите классы сопряжённых элементов, найдите размерности неприводимых представлений и полностью вычислите характер хоть одного неоднородного неприводимого представления.

**Задача 4.** Пусть  $K \subset \mathbb{C}$  — наименьшее подполе, содержащее  $\sqrt{-1}$  и  $\sqrt{3}$ . Опишите все целые над  $\mathbb{Z}$  элементы поля  $K$ .

**Задача 5.** Разложите на неприводимые представление симметрической группы  $S_4$ , индуцированное с нетривиального одномерного представления подгруппы Клейна  $V_4 \subset S_4$ , в котором перестановка  $(2, 1, 4, 3)$  действует тождественно.

**Задача 6.** Укажите точно, какому из неприводимых представлений  $S_5$  в левых идеалах  $V_\lambda = \mathbb{C}[S_4] \cdot s_\lambda \subset \mathbb{C}[S_4]$ , порождённых симметризаторами Юнга  $s_\lambda = r_\lambda \cdot c_\lambda$ , построенными по каким-нибудь заполнениям таблиц

$$\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array},$$

изоморфно:

- а) (1 балл) одномерное знаковое представление  $U$
- б) (3 балла) представление  $V$  несобственной группой четырёхмерного симплекса
- в) (3 балла) представление  $U \otimes V$
- г) (3 балла) представление  $\Lambda^2 V$ .