Письменный зачёт за второй и третий модули

Задачи можно решать в любом порядке. Полное решение каждой из задач оценивается в 10 баллов. Один ответ без объяснений оцениваются в ноль баллов вне зависимости от того, правильный он или нет.

Задача 1. Имеется n различных цветов. Каждую грань октаэдра красят в один из них (при этом разные грани могут оказаться окрашенными одинаково). Сколько разных крашеных октаэдров можно таким образом получить?

Задача 2. Обозначим через G группу аффинных автоморфизмов аффинной прямой[1] над полем $\mathbb{F}_7 = \mathbb{Z}/(7)$. Выясните, из скольких элементов состоит эта группа и составьте таблицу её неприводимых характеров.

Задача 3. Существуют ли другие неабелевы группы такого же порядка, как группа G из предыдущей задачи? Если да, приведите пример такой группы, если нет, объясните почему.

Задача 4. Пусть $\zeta = e^{\pi i/3} \in \mathbb{C}$ — примитивный корень 6-й степени из единицы и $K \subset \mathbb{C}$ — наименьшее подполе, содержащее 1 и ζ. Опишите все целые над $\mathbb{Z}$ элементы поля K.

Задача 5. Разложите на неприводимые представление симметрической группы S_5, индуцированное с трёхмерного представления знакопеременной подгруппы $A_5 \subset S_5$ вращениями икосаэдра.

Задача 6. Приведите в точное соответствие друг с другом неприводимые представления S_4 в левых идеалах $V_\lambda = \mathbb{C}[S_4] \cdot s_\lambda \subset \mathbb{C}[S_4]$, порождённых симметризаторами Юнга $s_\lambda = r_\lambda \cdot c_\lambda$, построенными по каким-нибудь заполнениям таблиц

$$\lambda = \ydiagram{4}\,, \quad \ydiagram{3,1}\,, \quad \ydiagram{2,2}\,, \quad \ydiagram{2,1,1}\,, \quad \ydiagram{1,1,1,1}\,,$$

и геометрически заданные представления: несобственной группой тетраэдра, собственной группой куба, группой треугольника, знаковое и тривиальное.

[1] т. е. биективных преобразований вида $x \mapsto ax + b$, где a, b — фиксированные числа