Листок 4. Уравнения Эйлера-Лагранжа.

1. В сферической системе координат положение точки задается расстоянием r от нее до начала координат и двумя углами θ и ϕ — зенитным и азимутальным, соответственно (см. рисунок). Переход от сферических координат к декартовым дается формулами

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta.$$

   Вычислите кинетическую энергию свободной материальной точки массы m в сферической системе координат.

2. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для следующих механических систем

   а) для блока с двумя грузами, установленного на вершине клина, свободно перемещающегося в горизонтальном направлении (задача 4 второго листка);

   б) для эллиптического маятника (задача 5 второго листка);

   в) для двойного маятника (см. рисунок), считая, что движение грузов m_1 и m_2, подвешенных на невесомых жестких стержнях длины l_1 и l_2, соответственно, происходит вертикальной плоскости.

3. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для сферического маятника, то есть для материальной точки в пространстве, связанной посредством жесткого невесомого стержня длины l с неподвижным центром (началом координат). В качестве обобщенных координат используйте сферические углы θ и ϕ.

   а) Проинтегрируйте один раз уравнение Эйлера-Лагранжа для координаты ϕ. Какой закон сохранения при этом получается?

   б) Пользуясь результатом пункта а), исключите зависимость от $\phi(t)$ из уравнения Эйлера-Лагранжа для координаты θ. Воспользовавшись интегрирующим множителем, проинтегрируйте один раз это уравнение. Какой закон сохранения получается?

4. Две материальные точки с массами m_1 и m_2 связаны нитью длины l, проходящей через отверстие в гладком столе, причем m_1 находится на поверхности стола, а m_2 висит на нити нже поверхности стола. Предполагая, что m_2 движется строго по вертикали, выберите переменные z и ϕ в качестве обобщенных координат (см. рисунок) и составьте лагранжиан. Напишите уравнения Эйлера-Лагранжа.

   а) Проинтегрируйте один раз уравнение Эйлера-Лагранжа для координаты ϕ. Какой закон сохранения при этом получается?

   б) Пользуясь результатом пункта а), исключите зависимость от $\phi(t)$ из уравнения Эйлера-Лагранжа для координаты z. Воспользовавшись интегрирующим множителем, проинтегрируйте один раз это уравнение. Какой закон сохранения получается?

Рисунок к задаче 1

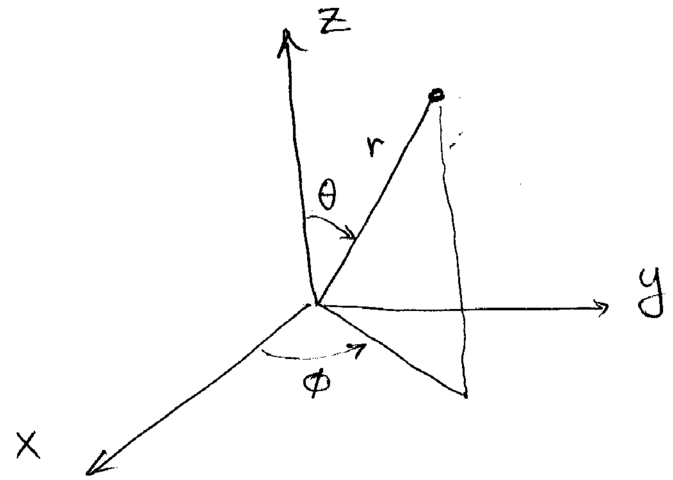

Рисунок к задаче 2 в

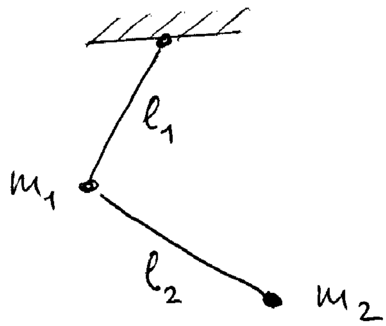

Рисунок к задаче 4