Домашнее задание по дифференциальным уравнениям к 14 апреля

1. Найдите общее решение линейного дифференциального уравнения, подобрав частное решение в виде показательной, тригонометрической или рациональной функции.
   (1) $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0$;
   (2) $y'' - y' \operatorname{tg} x + 2y = 0$;

2. Решите неоднородное линейное уравнение методом вариации постоянных.
   (1) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$;
   (2) $y'' + 4y = 2 \operatorname{tg} x$.

3. Исследуйте устойчивость нулевого решения следующих систем
   (1)
$$\begin{cases} \dot{x} &= x^2 + y^2 - x \\ \dot{y} &= 2x - 3y + (x+y)^2. \end{cases}$$
   (2)
$$\begin{cases} \dot{x} &= e^{x+2y} - \cos 3x \\ \dot{y} &= \sqrt{4+8x} - 2e^y \end{cases}$$

Теоретические задачи

1. (1) Покажите, что множество всех функций $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих какому-либо линейному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, является линейным пространством. Укажите какой-нибудь базис в этом пространстве.
   (2) Последовательность $\{y_n\}$ называется линейно-рекуррентной, если существуют такие числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, что для всех $n > k$ выполнено $y_n = a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} + \ldots + a_k y_{n-k}$. Покажите, что множество всех линейно-рекуррентных числовых последовательностей $\{y_n\}$ является линейным пространством. Укажите какой-нибудь базис в этом пространстве.

2. Приведите уравнение Эйлера
$$x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0$$
где $a_0, \ldots, a_{n-1}$ – константы, заменой переменной к линейному однородному уравнению с постоянными коэффициентами. Найдите характеристический многочлен получившегося уравнения.

3. (1) Докажите, что если каждое решение линейной однородной системы стремится к нулю при $t \to +\infty$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.
   (2) Докажите, что если у линейной однородной системы существует неограниченноепри $t \to +\infty$ решение, то нулевое решение неустойчиво.