Лагранжева механика. Материалы к коллоквиуму.

I. Вопросы.

1. Механические системы с одной степенью свободы (движение в одномерном потенциале). Фазовое пространство, фазовый портрет. Описание качественного поведения системы.
2. Система материальных точек: конфигурационное и фазовое пространства, центр масс. Дифференциальные уравнения, соответствующие законам Ньютона. Законы сохранения количества движения и момента количества движения.
3. Работа силы. Консервативные силы. Вычисление потенциала консервативной силы. Закон сохранения энергии для системы материальных точек.
4. Центральные силы. Консервативность центральной силы. Вычисление потенциала центральной силы. Примеры центральных сил и их потенциалов.
5. Задача двух тел. Сведение к задаче о движении частицы в поле плоской центральной силы. Законы Кеплера.
6. Идеальные и голономные связи. Активные и реактивные силы. Конфигурационное пространство системы со связями. Вывод уравнений движения исключением сил реакции. Принцип Даламбера.
7. Уравнения Эйлера-Лагранжа. Вывод из принципа Даламбера. Обобщенные силы. Лагранжиан консервативной системы.
8. Уравнения движения частицы на плоскости в полярных координатах как пример уравнений Эйлера-Лагранжа.
9. Кинетическая энергия твердого тела. Тензор инерции. Моменты инерции.
10. Принцип наименьшего действия. Вывод уравнений Эйлера-Лагранжа из принципа наименьшего действия.
11. Вариационные задачи в геометрии. Примеры решения (задачи о минимальном расстоянии и площади поверхности вращения).
12. Законы сохранения в уравнениях Эйлера-Лагранжа. Примеры.

II. Задачи.

1. Нарисуйте фазовые портреты движения одномерной частицы в поле потенциала

   а) $U(x) = e^{-2\alpha x} - 2e^{-\alpha x}$;

   б) $U(x) = -\operatorname{ch}^{-2}(\alpha x)$.

   Найдите точку устойчивого равновесия. При каком значении энергии достигается устойчивое равновесие?

2. Нарисуйте фазовые портреты движения одномерной частицы в поле потенциала

   $$U(x) = \operatorname{tg}^2(\alpha x).$$

   Вычислите время, за которое частица с энергией E попадает из точки x_1 в точку x_2. Вычислите время, за которое частица попадает из точки x_1 в точку x_2, если в начале движения в точке x_1 у нее была нулевая скорость.

В задачах 3 - 8 требуется уметь: а) выводить уравнения движения, выписав полный набор уравнений Ньютона и исключив силы реакции опор и натяжения нитей б) выводить уравнения движения, воспользовавшись принципом Даламбера. в) выводить уравнения движения, выписав уравнения Эйлера-Лагранжа; г) определять возможные первые интегралы движения (законы сохранения).

3. Два груза массой m_1 и m_2 соединены нерастяжимой невесомой нитью, перекинутой через блок, установленный на вершине гладкого клина массы M с углом при основании α, лежащего на гладкой горизонтальной поверхности. Под действием силы тяжести первый груз опускается вертикально вдоль вертикальной стороны клина, второй скользит по его боковой поверхности.

4. Две точки, массы которых m_1 и m_2, соединенные невесомым стержнем длины l, перемещаются по гладким сторонам неподвижного прямого угла, расположенного в вертикальной плоскости. Стороны угла образуют равные углы $\frac{\pi}{4}$ с горизонтом.

5. Эллиптический маятник: плоский маятник длины l, с грузом массы m_1, точка подвеса которого представляет собой груз массы m_2, свободно перемещающийся по горизонтальной прямой.

6. Два груза, соединенные невесомой нерастяжимой нитью: один массы m_1 съезжает по прямой с горизонтального стола, второй массы m_2 свисает на нити со стола и колеблется, оставаясь в одной вертикальной плоскости с траекторией движения первого груза.

7. В гладкой горизонтальной прямолинейной трубе, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, находится бусинка массы m, свободно перемещающаяся вдоль трубы. Найти закон движения бусинки по трубе.

8. Через блок, массой которого можно пренебречь, перекинута нить; к одному концу этой нити подвешен груз массой m_1, к другому крепится еще один невесомый блок, через который перекинута вторая нить, несущая на концах грузы массами m_2 и m_3. Описать движение системы.

9. Три тела с массами m_1, m_2, m_3 свободно перемещаются в пространстве, взаимодействуя друг с другом с помощью сил гравитационного притяжения. Составьте лагранжиан системы и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа. Есть ли у этой системы интегралы движения?

10. Вычислите кинетическую энергию свободной материальной точки в сферических координатах.

11. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для сферического маятника, то есть для материальной точки в пространстве, связанной посредством жесткого невесомого стержня длины l с неподвижным центром (началом координат). В качестве обобщенных координат используйте сферические углы ϑ и φ.

12. Две точки равной массы m соединены жестким невесомым стержнем длины l. Середина этого стержня может двигаться по окружности радиуса r. Выберите для этой системы подходящие обобщенные координаты. Выразите кинетическую энергию в обобщенных координатах.

13. Составьте лагранжиан и выпишите уравнения Эйлера-Лагранжа для двойного маятника, считая, что движение грузов m_1 и m_2, подвешенных на невесомых жестких стержнях длины l_1 и l_2, соответственно, происходит вертикальной плоскости.

14. Регулятор Уатта состоит из четырех одинаковых стержней OA, OB, AC и BC длиною l, двух шаров A и B, имеющих массу m каждый, и муфты C массы M, которая может скользить по неподвижной вертикальной оси Oz. Точка O неподвижна. Вся система может вращаться без трения вокруг оси Oz. Пренебрегая массой стержней и принимая за параметры угол $\varphi = \angle$ BOC и угол ϑ поворота системы вокруг оси Oz, составить Лагранжиан, выписать уравнения Эйлера-Лагранжа, и получить из них (или независимо) выражения для первых интегралов: энергии и момента импульса.

15. Однородный плоский диск (монета) радиуса r и массы m вращается с угловой скоростью ω вокруг прямой, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через его центр. Найдите кинетическую энергию диска.

16. Та же задача для диска, вращающегося вокруг своего диаметра.

17. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для массивного однородного стержня длины l и массы m, двигающегося в вертикальной плоскости, причем один его конец скользит по вертикальной стене, а второй опирается на гладкий пол.

18. Составьте лагранжиан и напишите уравнения Эйлера-Лагранжа для массивного однородного стержня длины l и массы m, первый конец которого перемещается вдоль горизонтальной прямой (гладкий пол), а второй свободно вращается в вертикальной плоскости. В качестве обобщенных координат выберите угол наклона стержня относительно горизонтали и положение его первого конца.

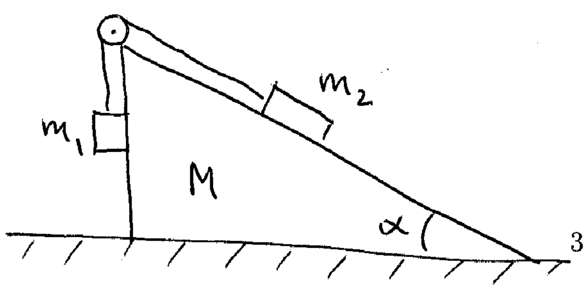
19. Найдите геодезические для плоскости Лобачевского в модели верхней полуплоскости.

Литература.

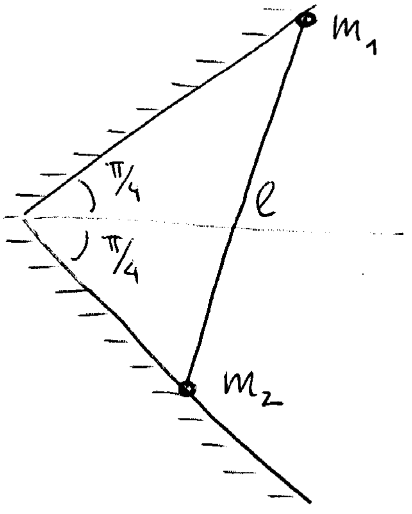
1. Голдстейн Г., Классическая механика
2. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М., Механика
3. Гантмахер Ф.Р., Лекции по аналитической механике
4. Арнольд И.В., Математические методы классической механики
5. Эльсгольц Л.Э., Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.
6. Бухгольц Н.Н., Воронков И.М., Минаков А.П., Сборник задач по теоретической механике
7. Баринова М.Ф., Голубева О.В., Задачи и упражнения по классической механике

<u>Рисунки к задачам</u>:

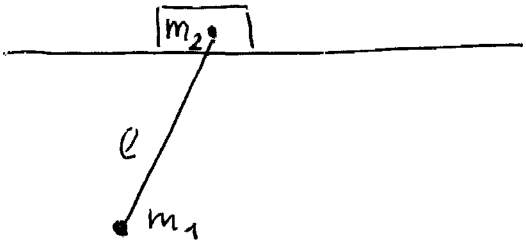
3



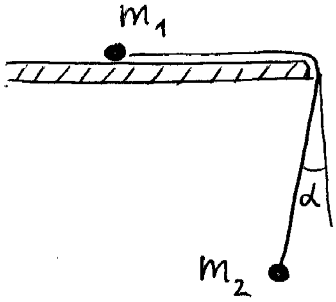
4



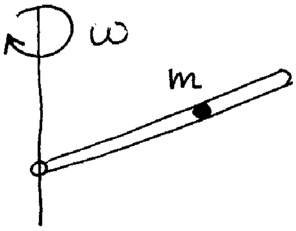
5



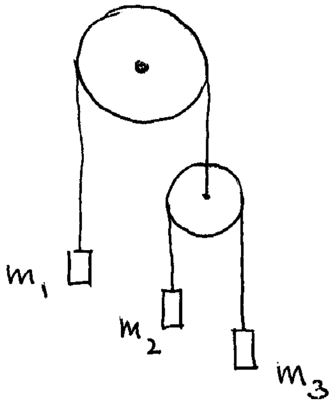
6



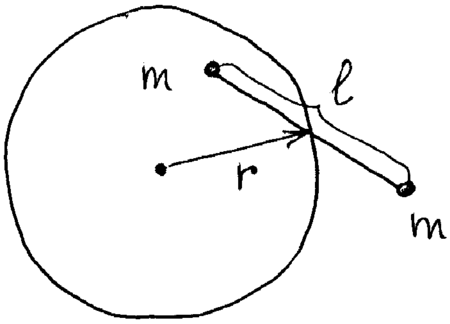
7



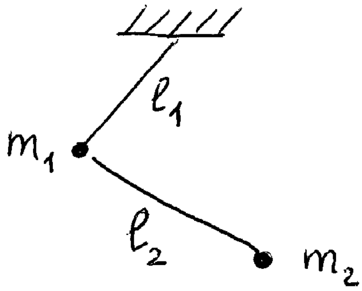
8



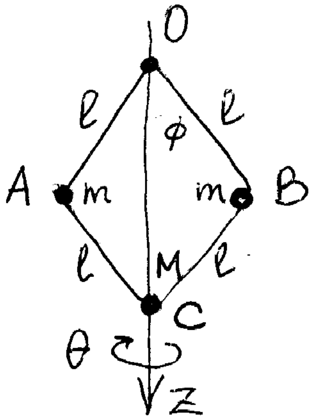
12



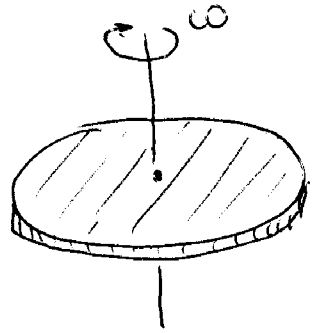
13



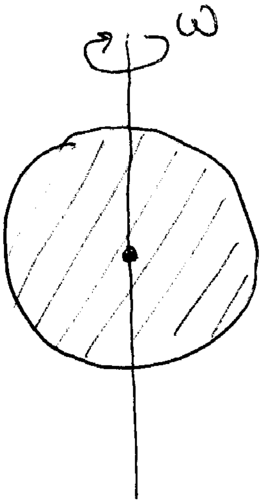
14



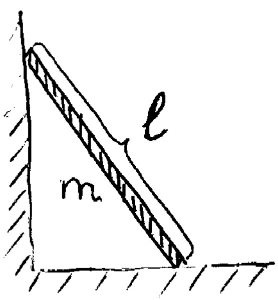
15



16



17



18