§3. Проективные коники и соответствия на прямых.

3.1. Гомографии. Многие геометрические задачи так или иначе связаны с соответствиями между точками одной проективной прямой и точками другой проективной прямой, такими что координаты соответственных точек *алгебраически* выражаются друг через друга. Простейшими такими соответствиями являются рациональные биекции, или *гомографии*.

3.1.1. ЛЕММА. *Если формула $t \mapsto \varphi(t) = g(t)/h(t)$, где $g, h \in \Bbbk[t]$, задаёт над алгебраически замкнутым*[1] *полем $\Bbbk$ биекцию $\varphi : \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\} \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \smallsetminus \{\text{конечное множество}\}$, то φ — дробно линейный изоморфизм (в частности, φ продолжается на всю прямую).*

Доказательство. Переходя к однородным координатам $(x_0 : x_1)$, в которых $t = x_1/x_0$, и модифицируя, если потребуется, конечное множество, на котором φ не определено, мы можем переписать формулу, задающую φ, в виде $\varphi(x_0 : x_1) = (f_0(x_0, x_1) : f_1(x_0, x_1))$, где f_1 и f_2 — однородные многочлены одинаковой степени $d = \deg f_0 = \deg f_1$ от (x_0, x_1) без общих делителей. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{P}_d$ всех однородных многочленов степени d от (x_0, x_1) прямую

$$(f_0, f_1) = \{\vartheta_1 f_0(x_0, x_1) - \vartheta_0 f_1(x_0, x_1) \mid \vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1\}. \tag{3-1}$$

По условию бесконечно много точек $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$ имеет ровно один прообраз $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$ относительно отображения φ. Поэтому для таких ϑ многочлен $\det(\varphi(x), \vartheta) = \vartheta_1 \cdot f_0(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot f_1(x_0, x_1)$ имеет ровно один корень, а значит является полной d-той степенью линейной формы. Таким образом, прямая (3-1) имеет бесконечно много пересечений с кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$, образованной чистыми d-тыми степенями линейных форм. Но при $d \geqslant 2$ никакие 3 точки кривой Веронезе не коллинеарны. Поэтому $d = 1$, что и требовалось. □

3.1.2. Геометрическая классификация гомографий. Пусть прямые $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$ пересекаются в точке $q = \ell_1 \cap \ell_2$, и пусть дробно линейный изоморфизм $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ переводит три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$, отличные от q, в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$. Тогда возможны два случая, представленные на рис. 3◇1 и рис. 3◇2: либо три прямые (a_1, a_2), (b_1, b_2) и (c_1, c_2), соединяющие соответственные точки, проходят через одну точку p, либо — не проходят через одну точку.

В первом случае гомография φ является центральной проекцией из точки p и переводит точку $x \in \ell_1$ в точку $\ell_2 \cap (p, x)$. Действительно, такая проекция удовлетворяет условиям леммы (n° 3.1.1), и, значит, является дробно линейным изоморфизмом из ℓ_1 в ℓ_2. Этот изоморфизм называется *перспективой* с центром в p и обозначается γ_p. Равенство $\varphi = \gamma_p$ вытекает теперь из того, что оно имеет место на трёх точках a_1, b_1, c_1.

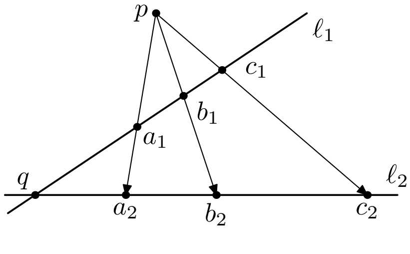

Рис. 3◇1. Перспектива γ_p.

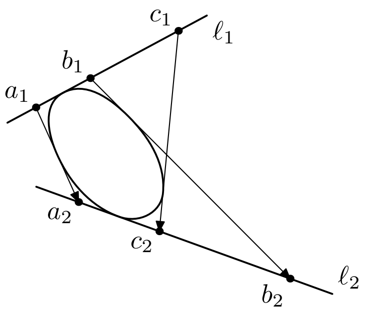

Рис. 3◇2. Гомография γ_C.

Во втором случае никакие три из прямых ℓ_1, ℓ_2 и (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) не пересекаются в одной точке, и по следствию (n° 2.6.4) существует единственная (и автоматически гладкая) коника C, касающаяся всех пяти этих прямых. Гомография φ переводит каждую точку $x_1 \in \ell_1$

[1] алгебраическая замкнутость поля существенна, поскольку отображение $t \mapsto t^3$ задаёт биекцию вещественной проективной прямой на себя, но не дробно линейно, и причина этого именно в том, что над $\mathbb{C}$ это отображение не взаимно однозначно: все точки кроме нуля и бесконечности имеют по три различных прообраза

в такую точку $x_2 \in \ell_2$, что прямая (x_1, x_2) касается коники C (в частности, $\gamma_C(\ell_1 \cap C) = q$ и $\gamma_C(q) = \ell_2 \cap C$). В самом деле, по лемме (n° 3.1.1) преобразование $\gamma_C : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$, переводящее точку $x \in \ell_1$ в точку пересечения $\ell_x \cap \ell_2$, где ℓ_x — отличная от ℓ_1 касательная, опущенная из x на C, является дробно линейным изоморфизмом, поскольку оно биективно и задаётся в координатах рациональной алгебраической формулой: уравнения двух касательных, опущенных из x на C — это точки пересечения двойственной коники $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ с прямой $x^\times = \mathrm{Ann}\,(x)$; одна из них — уравнение прямой ℓ_1 — дана, так что вторая — уравнение прямой (x, y) — рационально через неё выражается. Равенство $\gamma_C = \varphi$, как и выше, проверяется по трём точкам a_1, b_1, c_1.

Итак, каждая гомография либо является перспективой γ_p, либо имеет вид γ_C, т. е. высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. Отметим, что в обоих случаях центр p и коника C определяются по гомографии *однозначно*. Кроме того, перспектива может рассматриваться как вырожденный случай гомографии γ_C, отвечающий особой конике C, распавшейся в объединение двух прямых, пересекающихся в центре перспективы (сами прямые могут в этом случае выбираться многими способами — подойдут любые две прямые, соединяющие соответственные точки гомографии).

Упражнение 3.1. Покажите, что гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ является перспективой тогда и только тогда, когда она переводит точку пересечения прямых $\ell_1 \cap \ell_2$ в себя.

3.1.3. Перекрёстная ось гомографии. Гомография $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, переводящая три различные точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1 \smallsetminus \ell_2$ в точки $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ является композицией $\varphi = \gamma_{b_1} \circ \gamma_{b_2}$ перспективы $\gamma_{b_2} : \ell_1 \longrightarrow \ell$ и перспективы $\gamma_{b_1} : \ell \longrightarrow \ell_2$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения двух пар «перекрёстных» прямых $(a_1, b_2) \cap (b_1, a_2)$ и $(c_1, b_2) \cap (b_1, c_2)$ (см. рис. 3◇3).

Упражнение 3.2. Убедитесь, что φ и $\gamma_{b_1} \circ \gamma_{b_2}$ одинаково действуют на a_1, b_1, c_1.

Из этого равенства вытекает, что $(b_1, \varphi(x)) \cap (x, b_2) \in \ell$ для любого $x \in \ell_1$, что позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(x)$ любой точки $x \in \ell_1$, если известно действие φ на какие-нибудь три точки (см. рис. 3◇3): проводим прямую ℓ и берём в качестве $\varphi(x)$ точку пересечения прямой ℓ_2 с прямой, соединяющей точки b_1 и $\ell \cap (x, b_2)$.

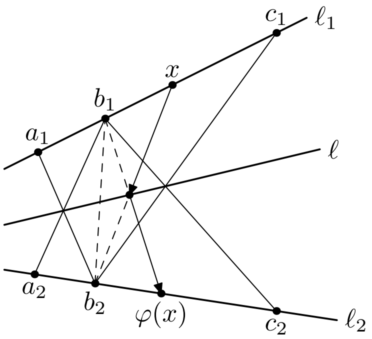

Рис. 3◇3. $\varphi = \gamma_{b_1} \circ \gamma_{b_2}$.

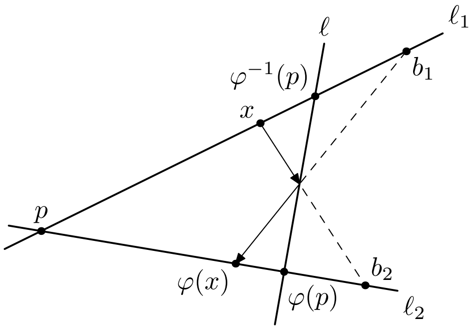

Рис. 3◇4. $\varphi(\ell \cap \ell_1) = p$ и $\varphi(p) = \ell \cap \ell_2$.

В частности, полагая $x = p = \ell_1 \cap \ell_2$, получаем $\varphi(p) = \ell \cap \ell_2 = \varphi(p)$, а полагая $x = \ell \cap \ell_1$, получаем $\varphi(\ell \cap \ell_1) = p$ (см. рис. 3◇4). Поэтому при $\varphi(p) \neq p$ прямая $\ell = \big(\varphi^{-1}(p)\,,\, \varphi(p\big)$ не зависит от выбора точек a_1, b_1, c_1 и является ГМТ пересечения *всевозможных* перекрёстных прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x)$ с $x, y \in \ell_1$. По этой причине она называется *перекрёстной осью* дробно линейного изоморфизма φ.

Упражнение 3.3. Покажите, что у перспектив (т. е. таких φ, что $\varphi(p) = p$) перекрёстная ось тоже имеется и проходит через $p = \ell_1 \cap \ell_2$.

3.2. Двойственный язык: гомографии между пучками. Гомография $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ между прямыми $\ell_1 = p_1^\times$ и $\ell_2 = p_2^\times$, лежащими на двойственной плоскости $\mathbb{P}_2^\times$, в терминах исходной плоскости $\mathbb{P}_2$ является дробно линейным изоморфизмом пучка прямых, проходящих через точку $p_1 = \mathrm{Ann}\,(\ell_1)$ с пучком прямых, проходящих через точку $p_2 = \mathrm{Ann}\,(\ell_2)$. Точки $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$

превращаются при этом в прямые $a_1^\times$, $b_1^\times$, $c_1^\times$ из пучка $p_1^\times$, а их образы $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ — в прямые $a_2^\times$, $b_2^\times$, $c_2^\times$ из пучка p_2.

Таким образом, всякий дробно линейный изоморфизм между пучками прямых с центрами в точках p_1 и p_2 однозначно задаётся тремя точками $a = a_1^\times \cap a_2^\times$, $b = b_1^\times \cap b_2^\times$, $c = c_1^\times \cap c_2^\times$ и переводит прямые (p_1, a), (p_1, b), $(p_1, c) \in p_1^\times$ в прямые (p_2, a), (p_2, b), $(p_2, c) \in p_2^\times$ (см. рис. 3◇5). Мы будем обозначать такую гомографию γ_{abc}.

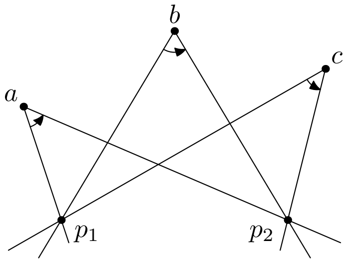

Рис. 3◇5. Гомография пучков $\gamma_{abc} : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$.

Упражнение 3.4. Убедитесь, что никакие 4 из пяти точек p_1, p_2, a, b, c не лежат на одной прямой.

Через точки p_1, p_2, a, b, c проходит единственная коника C. Если точки a, b, c коллинеарны (как на рис. 3◇6) или одна из точек a, b, c попала на прямую (p_1, p_2), то коника C распадается в объединение прямой (p_1, p_2) и ещё одной прямой ℓ. В этом случае γ_{abc} переводит прямую (p_1, x) с $x \in \ell$ в прямую (p_2, x) (см. рис. 3◇6), и соответствующая гомография $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ на $\mathbb{P}_2^\times$ является перспективой с центром в точке $\ell^\times \in \mathbb{P}_2^\times$. Мы будем обозначать такой изоморфизм γ_{abc} через $\gamma_\ell : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$.

Упражнение 3.5. Убедитесь, что $C = \ell \cup (p_1, p_2) \iff \gamma_{abc}\left((p_1, p_2)\right) = (p_1, p_2)$.

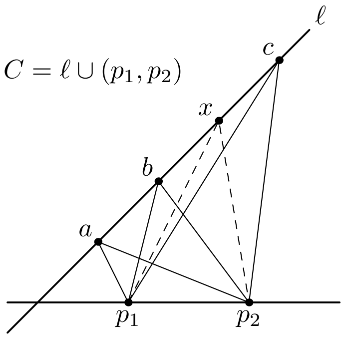

Рис. 3◇6. $\gamma_{abc} = \gamma_C$.

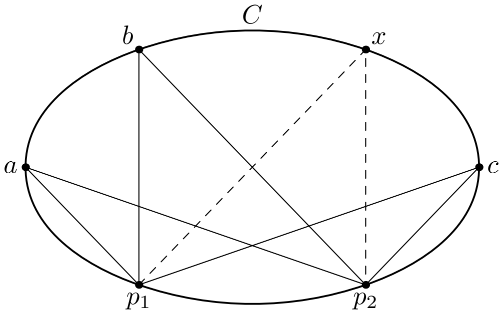

Рис. 3◇7. $\gamma_{abc} = \gamma_\ell$.

В общем случае коника C невырождена, и $\varphi : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$ переводит прямую (p_1, x) с $x \in C$ в прямую (p_2, x) (см. рис. 3◇7). Мы будем обозначать такое преобразование через γ_C. Отметим, что $\gamma_C\left((p_1, p_2)\right) = T_{p_2}C$ и $\gamma_C\left(T_{p_1}C\right) = (p_1, p_2)$. На двойственной плоскости $\mathbb{P}_2^\times$ соответствующее преобразование высекается касательными к двойственной конике: $\varphi = \gamma_{C^\times} : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$.

Подчеркнём, что и прямая ℓ и коника C однозначно определяются по гомографии $\gamma_{abc} : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$ как ГМТ пересечения соответственных прямых $\ell' \cap \gamma_{abc}(\ell')$, где ℓ' пробегает пучок $p_1^\times$.

Упражнение 3.6. Покажите, что для любого дробно линейного изоморфизма $\varphi : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$ существует точка, в которой пересекаются все прямые, соединяющие пары точек пересечений $\ell' \cap \varphi(\ell'')$ и $\ell'' \cap \varphi(\ell')$, где $\ell', \ell'' \in p_1^\times$.

Пучок прямых с центром в точке p_1 можно запараметризовать точками какой-нибудь не проходящей через p_1 прямой ℓ_1, сопоставляя каждой каждой точке $x \in \ell_1$ прямую (p_1, x). Аналогично, пучок прямых $p_2^\times$ можно запараметризовать точками какой-нибудь прямой $\ell_2 \not\ni p_2$. После этого любую гомографию $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ можно воспринимать как гомографию между пучками $\varphi : p_1^\times \longrightarrow p_2^\times$, и наоборот. При этом геометрическое место точек пересечения соответственных прямых $(p_1, x) \cap (p_2, \varphi(x))$, где x пробегает ℓ_1, является, как мы видели, гладкой коникой C, проходящей через точки p_1 и p_2, или же прямой ℓ. Последнее равносильно тому, что $\varphi\big((p_1, p_2) \cap \ell_1\big) = (p_1, p_2) \cap \ell_2$, и может восприниматься как вырожденный случай первого, отвечающий распавшейся конике $C = \ell \cup (p_1, p_2)$.

Иначе говоря, любую гомографию $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ можно (многими способами) представить в виде композиции проекции прямой ℓ_1 на некоторую конику C из точки $p_1 \in C$ и, затем, проекции коники C на ℓ_2 из другой точки $p_2 \in C$ (см. рис. 3◇7). Мы будем обозначать такую композицию через $\gamma_{p_2 C p_1} : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$.

3.2.1. Пример: вписанно-описанные треугольники. Покажем, что два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ вписаны в одну и ту же гладкую конику Q', если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники Q''. Поскольку эти две импликации проективно двойственны друг другу, достаточно проверить только одну из них. Пусть 6 точек A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 лежат на одной конике Q' (см. рис. 3◇9). Гомография $\gamma_{C_1Q'C_2} : (A_1C_1) \longrightarrow (A_2C_2)$ переводит $A_1 \mapsto M$, $K \mapsto B_2$, $L \mapsto A_2$, $B_1 \mapsto N$ и не является перспективой. Значит, она задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конике Q'', которая вписана в оба треугольника, что и требовалось.

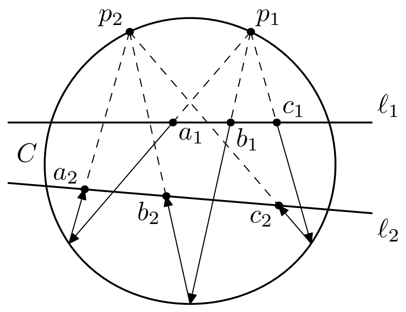

Рис. 3◇8. Гомография $\gamma_{p_2Cp_1}$.

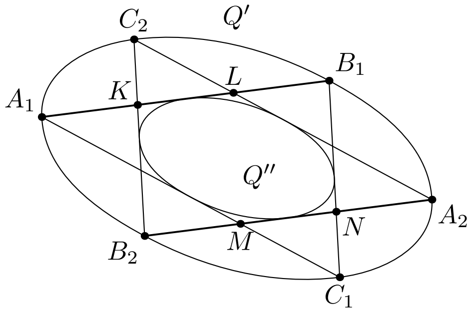

Рис. 3◇9. Вписанно-описанные треугольники.

Из сказанного вытекает, в частности, что если пара коник Q' и Q'' такова, что существует хоть один треугольник ABC, одновременно вписанный в Q' и описанный около Q'', то такой же треугольник $A'B'C'$ (одновременно вписанный в Q и описанный около Q') можно нарисовать стартовав *с любой* точки $A' \in Q$. Действительно, проведём из A' две касательных $(A'B')$ и $(A'C')$ к конике Q'' до их пересечения с Q' в точках $B', C' \in Q'$, как на рис. 3◇9). По доказанному, треугольники ABC и $A'B'C'$ будут описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых (AB), (BC), (CA), $(A'B')$, $(A'C')$, эта коника и есть Q''.

Упражнение 3.7. Покажите, что для любой гомографии $\varphi : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ точки p_1 и p_2 всегда можно подобрать так, чтобы в разложении $\varphi = \gamma_{p_2Cp_1}$ коника C была гладкой.

3.3. Гексограмма Паскаля. Перспектива $\gamma_p : \ell_1 \longrightarrow \ell_2$ (т.е. проекция ℓ_1 на ℓ_2 из точки $p \notin \ell_1 \cup \ell_2$) представляется в виде $\gamma_p = \gamma_{p_2Cp_1}$, как показано на рис. 3◇10: проведём любую конику C через точку пересечения $b = \ell_1 \cap \ell_2$ и любые две точки $a_1 \in \ell_1$ и $c_2 \in \ell_2$, отличные от b, и возьмём $p_1 = (pc_2) \cap C$ и $p_2 = (pa_1) \cap C$. Из рис. 3◇10 очевидно, что $\gamma_{p_2Cp_1}$ и γ_p одинаково действуют на три точки a_1, b и c_1. Равенство $\gamma_p = \gamma_{p_2Cp_1}$ имеет много замечательных следствий.

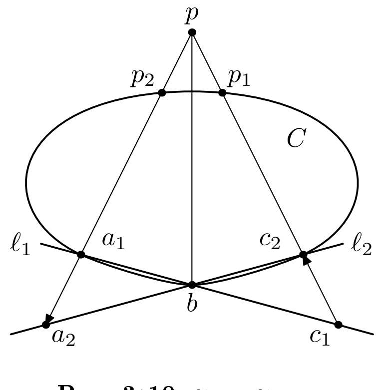

Рис. 3◇10. $\gamma_p = \gamma_{p_2Cp_1}$.

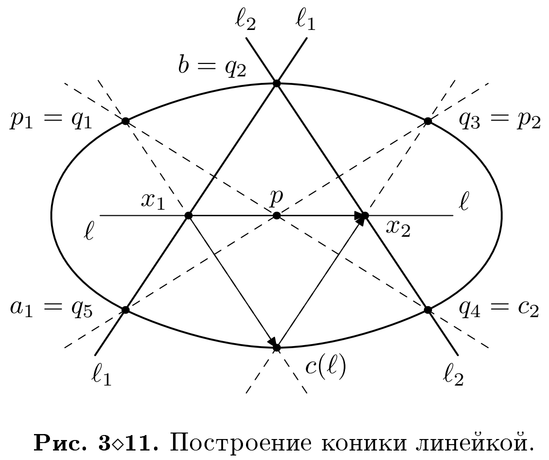

Рис. 3◇11. Построение коники линейкой.

3.3.1. Пример: построение коники одной линейкой. Если заданы пять точек $q_1, q_2, \dots, q_5$, никакие 3 из которых не коллинеарны, то при помощи линейки можно эффективно построить сколь угодно плотное множество точек на проходящей через эти пять точек конике C (см. рис. 3◇11). А именно, приведём рис. 3◇11 в соответствие с рис. 3◇10, полагая $p_1 = q_1$, $p_2 = q_3$, $b = q_2$, $a_1 = q_5$, $c_2 = q_5$. Тогда проекция прямой $\ell_1 = (q_2, q_5) = (a_1, b)$ на прямую $\ell_2 = (q_2, q_4) = (b, c_2)$ из точки $p = (q_1q_4) \cap (q_3q_5)$ будет совпадать с композицией проекции $\gamma_{q_1} : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ и проекции $\gamma_{q_3} : C \xrightarrow{\sim} \ell_2$. Поскольку для любой прямой ℓ, проходящей через p, точка $x_1 = \ell \cap \ell_1$ переводится при этом в точку $x_2 = \ell \cap \ell_2$, точка пересечения прямых $(x_1q_1) \cap (x_2q_3) \in C$ лежит на C, и ровно один раз пробежит C, когда ℓ пробежит пучок прямых, проходящих через p.

3.3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ТЕОРЕМА ПАСКАЛЯ). *Шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$ тогда и только тогда лежат на одной конике, когда коллинеарны три точки $x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1)$, $y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5)$ и $z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$, в которых пересекаются пары «противоположных сторон» шестиугольника $p_1, p_2, \dots, p_6$ (см. рис. 3◇12 и рис. 3◇13).*

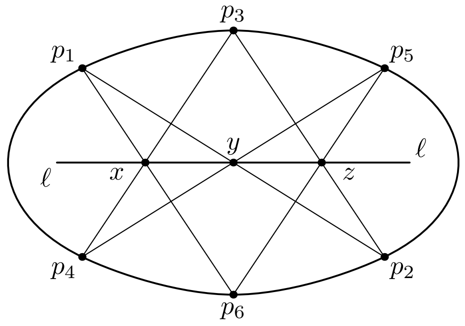

Рис. 3◇12. Гексограмма Паскаля.

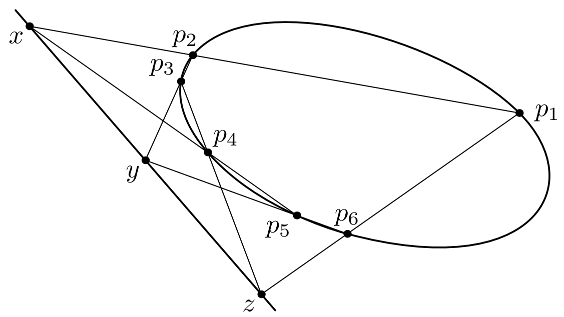

Рис. 3◇13. Вписанный шестиугольник.

Доказательство. с рис. 3◇11 Сопоставляя рис. 3◇12 видим, что если точки x, y, z коллинеарны, то точка $p_6 = (p_1x) = (p_5z)$ лежит на конике C, проходящей через точки $p_1, p_2, \dots, p_5$, поскольку точка z является в этом случае образом точки x при центральной проекции прямой $\ell_1 = (p_3p_4)$ на прямую $\ell_2 = (p_3p_2)$ из точки y, а эта проекция раскладывается в композицию проекций $\gamma_{p_1} : \ell_1 \xrightarrow{\sim} C$ и проекции $\gamma_{p_5} : C \xrightarrow{\sim} \ell_2$. Наоборот, если все шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$ лежат на некоторой конике C, то точка z является образом точки x при гомографии $\gamma_C^{p_5p_1} : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, а поскольку эта гомография совпадает с проекцией $\gamma_y :: \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$, точка z лежит и на прямой $\ell = (xy)$. □

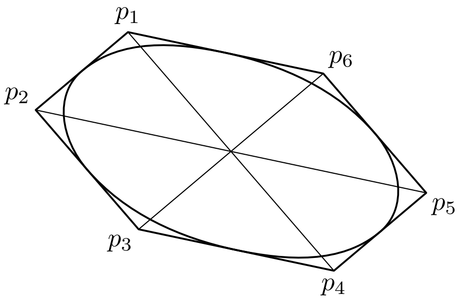

Рис. 3◇14. Теорема Брианшона.

3.3.3. СЛЕДСТВИЕ (ТЕОРЕМА БРИАНШОНА). *6-угольник $p_1, p_2, \dots, p_6$ тогда и только тогда описан вокруг некоторой коники, когда его главные диагонали (p_1p_4), (p_2p_5), (p_3p_6) пересекаются в одной точке (см. рис. 3◇14).*

Доказательство. Эта теорема проективно двойственна к теореме Паскаля. □

3.4. Внутренняя геометрия гладкой коники. Гладкую конику над алгебраически замкнутым полем можно воспринимать как конику Веронезе C_v из примера (n° 1.6.1). А именно, зафиксируем двумерное векторное пространство U и проективную прямую $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$. Тогда множество неупорядоченных пар точек $\{a, b\}$ на этой прямой естественно отождествляется с проективной плоскостью $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2U^*)$ — пространством квадрик на $\mathbb{P}_1$. Отображение Веронезе

$$\mathbb{P}_1 \xhookrightarrow{p \mapsto \{p,p,\}} \mathbb{P}(S^2U^*) \tag{3-2}$$

вкладывает $\mathbb{P}_1$ в $\mathbb{P}_2$ как множество двойных точек $\{p, p\}$. Это вложение связано с описанным в примере (n° 1.6.1) вложением линейных форм в квадратичные

$$\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \xhookrightarrow{\psi \mapsto \psi^2} \mathbb{P}(S^2U^*) \tag{3-3}$$

при помощи канонического изоморфизма

$$\det : \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(U^*) = \mathbb{P}_1^\times \,, \tag{3-4}$$

сопоставляющего точке $p \in \mathbb{P}_1$ линейную форму $\det(p,x) \in \mathbb{P}_1^\times$, зануляющуюся в точке p. Пользуясь таким отождествлением, мы в дальнейшем будем свободно переходить с языка точек на язык линейных форм и обратно.

Если зафиксировать в U базис (e_0, e_1) и двойственный базис (x_0, x_1) в U^*, а в качестве базиса в S^2U^* использовать $(x_0^2,\ 2\,x_0x_1,\ x_1^2)$, так что однородными координатами точки $p = p_0e_0+p_1e_1 \in \mathbb{P}_1$ будут $(p_0 : p_1)$, однородными координатами линейной формы $\varphi(x) = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1 \in \mathbb{P}_1^\times$ будут $(\alpha_0 : \alpha_1)$, а однородными координатами квадратичной формы $q(x) = a_0x_0^2 + 2\,a_1x_0x_1 + a_2x_1^2 \in \mathbb{P}_2$ будут $(a_0 : a_1 : a_2)$, то вложение (3-3) будет переводить $(\alpha_0 : \alpha_1) \in \mathbb{P}_1^\times$ в $(a_0 : a_1 : a_2) = (\alpha_0^2 : \alpha_0\alpha_1 : \alpha_1^2) \in \mathbb{P}_2$, изоморфизм (3-4) будет отождествлять точку $(p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$ с формой $(p_1 : -p_0) \in \mathbb{P}_1^\times$, а вложение (3-3) будет переводить точку $(p_0 : p_1) \in \mathbb{P}_1$ в квадратичную форму $(a_0 : a_1 : a_2) = (p_1^2 : -p_0p_1 : p_0^2) \in \mathbb{P}_2$. Кривая Веронезе представляет собой множество квадратных трёхчленов $a_0x_0^2 + 2\,a_1x_0x_1 + a_2x_1^2$, являющихся полными квадратами, и задаётся уравнением $D(a) = 0$, где

$$D(a) = a_1^2 - a_0a_1 \tag{3-5}$$

это четверть дискриминанта.

3.4.1. ЛЕММА. *Касательное пространство к конике Веронезе в точке $\{p,p\} \in C_v$ образовано всевозможными парами точек $\{p,t\}$, $t \in \mathbb{P}_1$.*

Доказательство. Поляризация формы (3-5), задающей конику Веронезе, имеет вид

$$\widetilde{D}\,(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) = a_1b_1 - (a_0b_1 + a_1b_0)/2\,.$$

Условие того, что пара точек $\{r,s\}$, задаваемая квадратичной формой $\det(r,x)\det(s,x)$ с координатами $(r_1s_1 : (r_1s_0 + r_0s_1)/2 : r_0s_0) = (2r_1s_1 : (r_1s_0 + r_0s_1) : 2r_0s_0)$, лежит на касательной к C_v, восстановленной в точке $\{p,p\}$ с координатами $(p_1^2 : -p_0p_1 : p_0^2)$, имеет вид

$$\begin{aligned} 0 = \widetilde{D}\,\big(\,2r_1s_1\,,\ -(r_1s_0 + r_0s_1)\,,\ 2r_0s_0\,,\ p_1^2\,,\ -p_0p_1\,,\ p_0^2\,\big) = \\ = p_0p_1(r_1s_0 + r_0s_1) - (p_0^2r_1s_1 + p_1^2r_0s_0) = (p_1r_0 - p_0r_1)(p_0s_1 - p_1s_0) = \det(r,p)\det(p,s) \end{aligned}$$

и выполнено, если и только если хоть одна из точек $\{r,s\}$ совпадает с p. □

3.4.2. СЛЕДСТВИЕ. *Полярой точки $\{a,b\} \in \mathbb{P}_2$ относительно коники Веронезе является прямая, соединяющая точки $\{a,a\}$ и $\{b,b\}$.*

Доказательство. По предыдущему, касательные к кривой Веронезе, восстановленные в точках $\{a,a\}$ и $\{b,b\}$, пересекаются в точке $\{a,b\}$. □

3.4.3. Дробно линейные автоморфизмы коники. Мы будем называть коэффициенты $(\alpha_0 : \alpha_1)$ формы $\varphi(x) = \alpha_0x_0 + \alpha_1x_1$ *внутренними однородными координатами* точки $\varphi^2(x)$ на конике Веронезе C_v. Гомографией на конике C_v называется всякое отображение $\varphi : C_v \longrightarrow C_v$, задающее дробно линейное преобразование однородных координат.

Упражнение 3.8. Убедитесь, что свойство отображения быть гомографией не зависит от выбора базиса в пространстве U.

Согласно лемме (n° 3.1.1), любое отображение $\varphi : C_v \longrightarrow C_v$, переводящее точку $(\alpha_0 : \alpha_1)$ в точку $(f(\alpha_0/\alpha_1) : g(\alpha_0/\alpha_1))$, где f и g — многочлены, и биективное всюду, за исключением, может быть, конечного множества точек, является гомографией. Для любых двух упорядоченных троек различных точек коники существует единственная гомография, переводящее первую тройку точек во вторую с сохранением порядка.

3.4.4. Пример: **инволюции**. Нетождественная гомография, обратная самой себе, называется *инволюцией*. Над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ каждая инволюция имеет ровно две различных неподвижных точки. В самом деле, если инволюция $\varphi : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ на прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ индуцирована линейным автоморфизмом $F : U \longrightarrow U$, то условие $\varphi^2 = \mathrm{Id}$ означает, что $F^2 = \lambda E$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$. Таким образом, оператор F аннулируется многочленом $t^2 - \lambda = (t - \sqrt{\lambda})(t + \sqrt{\lambda})$ без кратных корней, и значит, диагонализуем. Поскольку $\varphi \neq \mathrm{Id}$, оператор F не скалярен, и значит, имеет два собственных вектора с противоположными собственными значениями $\pm\sqrt{\lambda}$, что не только доказывает наличие двух разных неподвижных точек, но и показывает, что две инволюции совпадают тогда и только тогда, когда неупорядоченные пары их неподвижных точек одинаковы.

Мы будем обозначать инволюцию с неподвижными точками $p,q \in \mathbb{P}_1$ через $\sigma_{\{p,q\}}$. Геометрически, инволюция $\sigma_{\{p,q\}} : C_v \longrightarrow C_v$ высекается на C_v пучком прямых с центром в точке $\{p,q\} \in \mathbb{P}_2$ (см. рис. 3◇15): точки $z,w \in C_v$ переводятся друг в друга инволюцией $\sigma_{\{p,q\}}$ тогда и только тогда, когда прямая (z,w) проходит через точку $s = \{p,q\}$. Действительно, такое геометрическое правило определяет на C_v гомографию, которая обратна самой себе и имеет в качестве неподвижных точек точки касания с C_v двух касательных, опущенных на C_v из $s = \{p,q\}$, т.е. в точности точки $\{p,p\}$ и $\{q,q\}$.

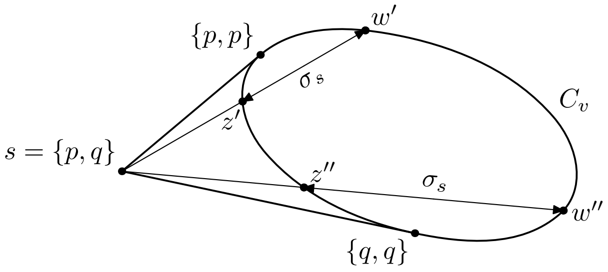

Рис. 3◇15. Инволюция на конике.

Упражнение 3.9. Покажите, что для любых двух различных инволюций $\sigma_1,\sigma_2 : C_v \longrightarrow C_v$ существует ровно одна точка $z \in C_v$ такая, что $\sigma_1(z) = \sigma_2(z)$.

3.4.5. Пример: перекрёстная ось. Точно так же, как и в (n° 3.1.3), гомография $\varphi : C_v \longrightarrow C_v$, переводящая три различные точки $a_1,b_1,c_1 \in C_v$ в точки $a_2,b_2,c_2 \in C_v$ является композицией проекции $\gamma_{b_2} : C_v \longrightarrow \ell$ и проекции $\gamma_{b_1} : \ell \longrightarrow C_v$, где прямая ℓ соединяет точки пересечения двух пар перекрёстных прямых $(a_1,b_2)\cap(b_1,a_2)$ и $(c_1,b_2)\cap(b_1,c_2)$ (см. рис. 3◇16). В частности, неподвижные точки φ — это точки пересечения $\ell \cap C_v$, откуда вытекает, что прямая ℓ не зависит от выбора точек $a_1,b_1,c_1 \in C_v$ и что φ имеет либо две неподвижные точки, либо одну (в этом случае ℓ касается C_v в этой точке).

Таким образом, ℓ представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых $(z,\varphi(w))\cap(w,\varphi(z))$ с произвольными различными $z,w \in C_v$. Отметим, что даёт новое доказательство теоремы Паскаля (n° 3.3.2): три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в C_v шестиугольника $a_1c_2b_1a_2c_1b_2$, будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, переводящей a_1,b_1,c_1 в a_2,b_2,c_2, лежат на её перекрёстной оси ℓ.

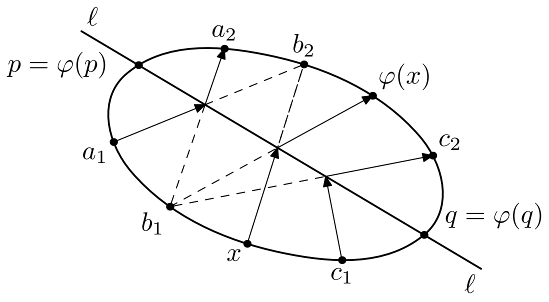

Рис. 3◇16. Перекрёстная ось.

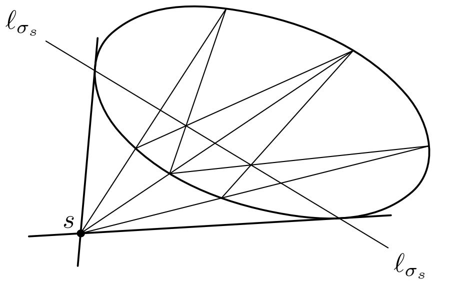

Рис. 3◇17. Построение касательных.

Отметим, что перекрёстная ось гомографии $\varphi : C \longrightarrow C$, заданной своим действием на какие-нибудь три точки, легко строится одной линейкой. Это позволяет одной линейкой построить образ $\varphi(z)$ любой точки $z \in C$ относительно такой гомографии, а также найти её неподвижные точки.

Например, можно одной линейкой начертить две касательных к данной гладкой конике C из данной точки $s \in \mathbb{P}_2$ — это будут две прямые, соединяющие s с неподвижными точками инволюции $\sigma_s : C \longrightarrow C$, высекаемой пучком прямых с центром в s. Чтобы найти эти неподвижные точки (см. рис. 3◇17), проведём через s любые три секущих и начертим перекрёстную ось ℓ_{σ_s} инволюции σ_s. Точки пересечения $\ell_{\sigma_s} \cap C$ будут искомыми точками касания.

Упражнение 3.10. На $\mathbb{P}_2$ заданы невырожденная коника Q и три точки A, B, C вне неё. При помощи одной линейки нарисуйте треугольник, который вписан в Q, а его стороны лежат на прямых, проходящих через A, B, C. Сколько решений имеет эта задача?

Указание. Начнём «наивное» построение из произвольной точки $p \in Q$ и обозначим через $\gamma(p) \in Q$ точку, куда мы вернёмся, пройдя через A, B, C; получающееся таким образом отображение $\gamma : C \longrightarrow C$ является гомографией, и нас интересуют её неподвижные точки.

Упражнение 3.11. Сформулируйте и решите задачу, двойственную к предыдущей.