## §2. Проективные квадрики.

Всюду в этой этой лекции мы предполагаем, что $\mathrm{char}(\Bbbk) \neq 2$.

**2.1. Квадрики и билинейные формы.** Проективная гиперповерхность второй степени

$$Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V) \,, \quad q \in S^2V^* \,,\ q \neq 0 \,,$$

называется *проективной квадрикой*. В однородных координатах $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ относительно какого-нибудь базиса $e_0, e_1, \dots, e_n$ в $V$ однородный квадратичный полином $q$ однозначно записывается в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x \,,$$

где $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ — строка координат, ${}^t x$ — столбец координат, а $A = (a_{ij})$ — *симметричная* матрица, которая при $i \neq j$ имеет в качестве $a_{ij}$ половину коэффициента при $x_i x_j$ в многочлене $q(x)$ . Иначе говоря, для любого однородного многочлена $q(x)$ второй степени существует единственная симметричная билинейная форма $\widetilde{q}(u, w)$ на $V \times V$, такая что $q(x) = \widetilde{q}(x, x)$. Эта симметричная билинейная форма называется *поляризацией* квадратичной формы $q$ и выражается через $q$ несколькими эквивалентными способами:

$$\widetilde{q}(x, y) = \sum_{i,j} a_{ij}\, x_i y_j = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = x \cdot A \cdot {}^t y =$$
$$= \frac{1}{2}\Big(q(x+y) - q(x) - q(y)\Big) = \frac{1}{4}\Big(q(x+y) - q(x-y)\Big) \,. \quad \text{(2-1)}$$

Матрица $A$ представляет собою *матрицу Грама* формы $\widetilde{q}$ в базисе $\{e_i\}$: $a_{ij} = \widetilde{q}(e_i, e_j)$ .

Упражнение 2.1. Проверьте, что в другом базисе $(e_0', e_1', \dots, e_n') = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$ новая матрица Грама $A'$ будет выражаться через $A$ по формуле $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$.

**2.1.1. Определитель формы.** Из упр. 2.1 вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама* $\det A$ умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода:

$$\det(A') = \det(A) \cdot \det{}^2(C) \,.$$

Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля $\Bbbk$, не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определителем* формы $q$ и обозначать $\det(q)$. Если $\det q \neq 0$, квадрика $V(q)$ называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

**2.1.2. Ранг формы.** Ещё одним важным инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат является ранг её матрицы Грама. Он называется *рангом* формы $q$.

Упражнение 2.2. Убедитесь, что ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса.

**2.1.3. Проективная эквивалентность квадрик.** Две квадрики называются *проективно эквивалентными*, если одна переводится в другую линейным проективным автоморфизмом объемлющего пространства.

**2.1.4.** ТЕОРЕМА ЛАГРАНЖА. *Для любой квадрики существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.*

Доказательство. Поскольку $q \not\equiv 0$, то $q(e) = \widetilde{q}(e, e) \neq 0$ для некоторого $e \in V$, который мы возьмем в качестве первого вектора искомого базиса. Покажем, что $V = (\Bbbk \cdot e) \oplus e^\perp$, где $e^\perp \overset{\text{def}}{=} \{\, u \in V \mid \widetilde{q}(u, e) = 0 \,\}$ — ортогональное дополнение к $e$ относительно формы $\widetilde{q}$. В самом деле, $(\Bbbk \cdot e) \cap e^\perp = 0$ , и любой вектор $v \in V$ представляется в виде $\lambda e + u$ с $\lambda = \widetilde{q}(v, e)/\widetilde{q}(e, e)$ и $u = v - \lambda e \in e^\perp$. Заменяя $V$ на $e^\perp$, мы, если $q|_{e^\perp} \not\equiv 0$, найдем второй базисный вектор и т. д. $\square$

**2.1.5.** СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем* $\Bbbk$ *произвольная квадрика задаётся в подходящих однородных координатах уравнением* $\sum\limits_{i=0}^{r-1} x_i^2 = 0$, *где* $r$ — *ранг квадрики. В частности, две квадрики проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.*

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов $e_i$ на $e_i/\sqrt{q(e_i)}$. □

**2.2. Квадрики на $\mathbb{P}_1$.** Согласно теореме Лагранжа произвольная квадратичная форма от двух переменных (над любым полем, в котором $1+1 \neq 0$) в подходящем базисе задаётся либо уравнением $x_0^2 + \alpha\, x_1^2 = 0$ с $a \neq 0$, либо уравнением $x_0^2 = 0$. В первом случае определитель формы $\det(q)$ с точностью до умножения на квадраты равен $a$, и стало быть, форма невырождена. Во втором случае $\det(q) = 0$ и форма вырождена.

Вырожденная квадрика $x_0^2 = 0$ называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение — это квадрат линейной формы, обращающейся в нуль в точке $(0:1)$.

Неособая квадрика $x_0^2 + \alpha\, x_1^2 = 0$ либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что $-\alpha \in \Bbbk$ не является квадратом. Отметим, что над алгебраически замкнутым полем $\Bbbk$ такого не бывает. Если же $-\alpha = \delta^2$, то $x_0^2 + \alpha\, x_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$ имеет на $\mathbb{P}_1$ два разных корня $(\pm\delta : 1)$.

Поскольку $-\alpha$ с точностью до умножения на квадрат совпадает с $-\det(q)$, вид квадрики на $\mathbb{P}_1$ полностью задаётся классом *дискриминанта* $D = -\det q$ по модулю умножения на ненулевые квадраты. А именно, если он нулевой, мы имеем двойную точку, если единичный — пару различных точек, в оставшемся случае (возможном лишь над незамкнутым полем) квадрика пуста.

**2.2.1.** СЛЕДСТВИЕ. *Для пересечения произвольной квадрики $Q$ с произвольной прямой $\ell$ имеется ровно 4 возможности: или $\ell \subset Q$, или $\ell \cap Q$ есть двойная точка, или $\ell \cap Q$ состоит из 2 различных точек, или $\ell \cap Q = \varnothing$, причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.* □

**2.3. Корреляция, ядро и особые точки.** Со всякой билинейной формой $q$ на $V$ связан линейный *оператор корреляции* $\widehat{q} : V \longrightarrow V^*$, переводящий вектор $v \in V$ в линейную форму

$$\widehat{q}(v) \;:\; w \longmapsto \widetilde{q}(w,v)\;.$$

Матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах $\{e_i\} \subset V$, $\{x_i\} \subset V^*$, совпадает с матрицей Грама $A$. В частности, $q$ невырождена тогда и только тогда, когда $\widehat{q}$ изоморфизм. Пространство

$$\ker \widehat{q} = \{\, v \in V \mid \widetilde{q}(w,v) = 0 \;\; \forall\, w \in V \,\}$$

называется *ядром* квадратичной формы $q$. Поскольку $\dim\ker\widehat{q} = \dim V - \operatorname{rk} A$, мы ещё раз видим, что ранг формы является её инвариантом (не зависит от координат).

Проективизация ядра $\operatorname{Sing} Q \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker\widehat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$ называется *множеством особых точек* (или *вершинным пространством*) квадрики $Q$. Обратите внимание, что $\operatorname{Sing} Q \subset Q$.

**2.3.1.** ТЕОРЕМА. *Пересечение $Q' = L \cap Q$ с любым дополнительным к $\operatorname{Sing} Q$ проективным подпространством $L \subset \mathbb{P}(V)$ представляет собой невырожденную квадрику в $L$, и $Q$ является линейным соединением*[1] $Q'$ *и* $\operatorname{Sing} Q$.

Доказательство. Запишем $V = U \oplus K$, где $K = \ker\widehat{q}$ и $L = \mathbb{P}(U)$. Если $u \in U$ лежит в ядре $\widehat{q}|_U$, то $q(u,u') = 0$ для всех $u' \in U$. Записывая произвольный вектор $v \in V$ как $v = u' + u''$ с $u' \in U$, $u'' \in K$, будем иметь $\widetilde{q}(u,v) = \widetilde{q}(u,u'') + \widetilde{q}(u,u') = 0$ для всех $v \in V$, откуда $u \in \ker\widehat{q} \cap U = 0$. Таким образом, ограничение $q|_U$ невырождено. Всякая прямая $\ell = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}(U \oplus K)$, пересекающая $\operatorname{Sing} Q = \mathbb{P}(K)$, либо целиком лежит в $\operatorname{Sing} Q$, либо пересекает $L = \mathbb{P}(U)$. Во втором случае $\dim(W \cap K) = \dim(W \cap U) = 1$ и в $W$ имеется

[1] т. е. объединением всех прямых, пересекающих как $Q'$, так и $\operatorname{Sing} Q$

базис $\{p, u\}$ с $p \in K$, $u \in U$. Единственным ненулевым элементом матрицы Грама ограничения $q|_W$ в этом базисе может быть лишь $q(u)$, и если $q(u) \neq 0$, то $q|_W$ — это двойная точка $p$, а если $q(u) = 0$, что $u \in Q'$ и $q|_W \equiv 0$. Таким образом, каждая прямая, пересекающая $\operatorname{Sing} Q$, но не лежащая в $\operatorname{Sing} Q$ целиком, либо больше вообще нигде не пересекает квадрику, либо пересекает $Q'$ и целиком лежит на квадрике $Q$. □

**2.4. Касательное пространство.** Прямая $\ell$, проходящая через точку $p \in Q$, называется *касательной* к $Q$ в $p$, если $\ell$ либо лежит на $Q$ целиком, либо пересекает $Q$ по двойной точке $p$. Объединение всех прямых, касающихся $Q$ в точке $p$, называется *касательным пространством* к квадрике $Q$ в точке $p \in Q$ и обозначается $T_pQ$.

**2.4.1.** ЛЕММА. *Прямая $\ell = (ab)$ касается квадрики $Q$, заданной уравнением $q(x) = 0$, в точке $a \in Q$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{q}(a, b) = 0$.*

Доказательство. Пусть $\ell = \mathbb{P}(U)$. Матрица Грама ограничения $q|_U$ имеет в базисе $\{a, b\}$ вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \widetilde{q}(a,b) \\ \widetilde{q}(b,a) & \widetilde{q}(b,b) \end{pmatrix},$$

и $\det q|_U = 0 \iff \widetilde{q}(a, b) = \widetilde{q}(b, a) = 0$. □

**2.4.2.** СЛЕДСТВИЕ. *Видимый из точки $b \notin Q$ контур квадрики*[1] *$Q$ высекается из квадрики гиперплоскостью $\operatorname{Ann} \widehat{q}(b) = \{x \mid \widetilde{q}(b, x) = 0\}$.* □

**2.4.3.** СЛЕДСТВИЕ. *Следующие условия на точку $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$ попарно эквиваленты:*

$$p \in \operatorname{Sing} Q \quad \iff \quad T_pQ = \mathbb{P}(V) \text{ есть все пространство} \quad \iff \quad \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0 \text{ для всех } i\,. \qquad \square$$

**2.4.4.** СЛЕДСТВИЕ. *Если точка $p \in Q$ неособа, то $T_pQ = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \widetilde{q}(p, x) = 0\}$ является гиперплоскостью коразмерности 1.* □

**2.5. Полярное соответствие.** Пространства $\mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными* проективными пространствами и (когда природа пространства $V$ несущественна) обозначаются через $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение

$$\langle\, \xi\,,\, v\,\rangle = 0 \quad \text{на} \quad \xi \in V^*\,,\ v \in V$$

при фиксированном $\xi \in \mathbb{P}^\times$ задаёт гиперплоскость в $\mathbb{P}_n$, а при фиксированном $v \in \mathbb{P}_n$ — гиперплоскость в $\mathbb{P}_n^\times$, состоящую из всех гиперплоскостей в $\mathbb{P}_n$, проходящих через точку $v \in \mathbb{P}_n$.

Для каждого $m = 0, 1, \dots, (n-1)$ имеется каноническая обращающая включение биекция между $m$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-1-m)$-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$, переводящая подпространство $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$ в подпространство $L^\times = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$, образованное всеми гиперплоскостями, содержащими $L$. Эта биекция называется *проективной двойственностью* и позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения, которые могут довольно сильно отличаться от исходных. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

Корреляция $\widehat{q}$, ассоциированная с невырожденной квадратичной формой $q$, индуцирует линейный проективный изоморфизм $\mathbb{P}(V) \xrightarrow{\overline{q}} \mathbb{P}(V^*)$, который называется *полярным преобразованием* (или *поляритетом*) квадрики $Q$. Он переводит точку $p \in \mathbb{P}_n$ в гиперплоскость $L \subset \mathbb{P}_n$, заданную уравнением $\widetilde{q}(p, x) = 0$. Точка $p$ и гиперплоскость $L$ в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики $Q$. Геометрически, поляра точки, не лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, высекающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке.

[1] т. е. ГМТ касания с $Q$ всевозможных касательных, опущенных на $Q$ из $b$

Таким образом, всякую квадрику $Q$ можно охарактеризовать как геометрическое место точек, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие $\widetilde{q}(a,b) = 0$ симметрично по $a$ и $b$, точка $a$ лежит на поляре точки $b$, если и только если точка $b$ лежит на поляре точки $a$. Такие точки называются *сопряжёнными* относительно квадрики $Q$.

Упражнение 2.3. Рассмотрим полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно границы некоторого круга $K$. Циркулем и линейкой постройте поляру данной точки и полюс данной прямой (это особенно интересно в случае, когда точка лежит внутри круга, а прямая не пересекает круг).

**2.5.1.** ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Пусть $a, b \notin Q$ и прямая $(ab)$ пересекает $Q$ в двух различных точках $c$, $d$. Точки $a$, $b$ тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики $Q$, когда они гармоничны по отношению к точкам $c$, $d$.*

Доказательство. Ограничение квадрики $Q$ на прямую $(ab) = (cd)$ задаётся в однородных координатах $(x_0 : x_1)$ относительно базиса $(c,d)$ квадратичной формой $q(x) = \det(x,c)\det(x,d)$, поляризация которой имеет вид $\widetilde{q}(x,y) = \frac{1}{2}\big(\det(x,c)\det(y,d) + \det(y,c)\det(x,d)\big)$. Условие сопряжённости $\widetilde{q}(a,b) = 0$ равносильно тому, что $\det(a,c)\det(b,d) = -\det(b,c)\det(a,d)$, т. е. равенству $[a,b,c,d] = -1$. □

**2.5.2.** ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для неособой квадрики $G \subset \mathbb{P}_n$ и произвольной квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ множество гиперплоскостей, полярных точкам $p \in Q$ относительно квадрики $G$, образуют квадрику в $Q_G^\times \subset \mathbb{P}_n^x$, того же ранга, что и квадрика $Q$. Если $Q$ и $G$ имеют в некоторых однородных координатах матрицы Грама $A$ и $B$ соответственно, то квадрика $Q_G^\times$ имеет в двойственных однородных координатах матрицу $B^{-1}AB^{-1}$.*

Доказательство. Поляритет $\widehat{q} : \mathbb{P}_n \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_n^\times$ гладкой квадрики $Q \subset \mathbb{P}_n$ переводит точку со столбцом координат $x$ в точку двойственного пространства со строкой координат $x^t \cdot B$ и является проективным изоморфизмом. Полярные гиперплоскости $\xi = \widehat{q}(p)$ точек $p \in P$ задаются, таким образом, уравнением

$$0 = x^t \cdot A \cdot x = \left(\xi \cdot B^{-1}\right) \cdot A \cdot \left(\xi \cdot B^{-1}\right)^t = \xi \cdot B^{-1}AB^{-1} \cdot \xi^t\,,$$

что и утверждалось. □

**2.5.3.** СЛЕДСТВИЕ. *Касательные пространства к гладкой квадрике $Q \subset \mathbb{P}_n$ образуют гладкую квадрику $Q^\times \subset \mathbb{P}_n^\times$. Матрицы Грама квадрик $Q$ и $Q^\times$ в двойственных базисах пространств $\mathbb{P}_n$ и $\mathbb{P}_n^\times$ обратны друг другу.*

Доказательство. Положим в предыдущей теореме $G = Q$ (и, стало быть, $B = A$). Тогда гиперплоскости, полярные точкам $p \in Q$ относительно квадрики $Q$ — это в точности касательные пространства $T_pQ$. □

**2.5.4. Поляритеты над незамкнутыми полями.** Над алгебраически незамкнутыми полями имеются (в том числе и непропорциональные друг другу) квадратичные формы $q$, задающие *пустые* квадрики $Q$. Тем не менее, соответствующие таким квадрикам полярные преобразования будут геометрически наблюдаемы.

Упражнение 2.4. Опишите геометрически полярное преобразование евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ относительно «мнимой» окружности $x^2 + y^2 = -1$.

На языке поляритетов пустота квадрики означает, что никакая точка не лежит на своей поляре.

**2.5.5.** ЛЕММА. *Два поляритета совпадают, если и только если задающие их квадратичные формы пропорциональны.*

Доказательство. Это сразу следует из леммы n° 1.8.1. □

**2.5.6.** СЛЕДСТВИЕ. *Над алгебраически замкнутым полем две квадрики совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны.*

Доказательство. Пусть $Q = Q'$. Поскольку при ограничении на любое дополнительное к $\operatorname{Sing} Q = \operatorname{Sing} Q'$ подпространство уравнения обеих квадрик не поменяются, можно считать обе квадрики невырожденными, а тогда всё следует из леммы n° 2.5.5. □

**2.6. Пространства квадрик.** Пространство $\mathbb{P}(S^2V^*)$ классов пропорциональных квадратичных форм называется *пространством квадрик*[1] на $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Это проективное пространство размерности $(n+1)(n+2)/2 - 1 = n(n+3)/2$ .

**2.6.1.** Пример: пространство коник. Квадрики на $\mathbb{P}_2$ называются *проективными кониками*. Они образуют пятимерное проективное пространство $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая* $x_0^2 = 0$ (ранг 1, все точки особые);
- *распавшаяся коника*[2] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2, одна особая точка);
- *гладкая коника* $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ .

Удобной моделью неособой коники в $\mathbb{P}_2$ является *коника Веронезе* $C_2$ из примера (n° 1.6.1) на стр. 6. Она живёт в пространстве $\mathbb{P}_2$ квадрик на $\mathbb{P}_1$ и состоит из всех вырожденных квадрик:

$$C_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \ : \quad a_0a_2 - a_1^2 = 0 \right\}$$

Вырожденная квадрика на $\mathbb{P}_1$ — это двойная точка, и её уравнение $a_0\, x_0^2 + 2a_1\, x_0x_1 + a_2\, x_1^2$ есть квадрат линейной формы $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^2$ , что доставляет рациональную параметризацию неособой коники на $\mathbb{P}_2$ однородными многочленами второй степени: $a_0 = \alpha_0^2$ , $\quad a_1 = \alpha_0\alpha_1$ , $\quad a_2 = \alpha_1^2$ .

**2.6.2.** ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Невырожденная коника пересекает произвольную кривую, заданную однородным уравнением степени $d$, не более, чем по $2\,d$ точкам, либо целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты.*

Доказательство. Запараметризуем неособую конику однородными полиномами степени 2 от параметра $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$ (например, спроектировав эту конику из лежащей на ней точки на какую-нибудь прямую, как в (n° 1.7.1)). Коника будет пересекать кривую с уравнением $f(q) = 0$ при значениях параметра $t$, удовлетворяющих уравнению $f(q(t)) = 0$, левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо однородна степени $2\,d$. В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более $2\,d$ точек пересечения. □

**2.6.3.** ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Каждые 5 точек в $\mathbb{P}_2$ лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.*

Доказательство. Поскольку при фиксированном $p$ уравнение $q(p) = 0$ линейно по $q$, коники, проходящие через $p \in \mathbb{P}_2$ образуют гиперплоскость в $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. Поскольку любые 5 гиперплоскостей в $\mathbb{P}_5$ имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, то коника содержит проходящую через них прямую, и потому распадается на эту прямую и прямую, проходящую через две другие точки. Если никакие три из точек не коллинеарны, всякая проходящая через них коника автоматически неособа и единственна по n° 2.6.2. □

**2.6.4.** СЛЕДСТВИЕ. *Каждые 5 прямых без тройных пересечений на $\mathbb{P}_2$ касаются единственной невырожденной коники.*

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: пять точек на $\mathbb{P}_2^\times$ , двойственные к данным пяти прямым на $\mathbb{P}_2$, лежат на единственной гладкой конике $C \subset \mathbb{P}_2^\times$, и двойственная ей коника $C \subset \mathbb{P}_2$ есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых. □

**2.6.5.** Пример: пространство квадрик в $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ — это $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2V^*)$. В частности, любые 9 точек, а также любые 3 прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на некоторой квадрике (достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек).

Особые квадрики в $\mathbb{P}_3$ (над алгебраически замкнутым полем) суть:

---

[1] над незамкнутым полем $\Bbbk$ не все точки этого пространства отвечают непустым квадрикам, и разные точки могут задавать одинаковые квадрики (например, пустые), так что правильнее было бы говорить о «пространстве поляритетов», чем о «пространстве квадрик», однако наше название является общепринятым

[2] т. е. объединение двух прямых $x_0 = \pm i\, x_1$ , пересекающихся в особой точке $(0 : 0 : 1)$

- *двойная плоскость* $x_0^2 = 0$ (ранг 1)
- *распавшаяся квадрика*[1] $x_0^2 + x_1^2 = 0$ (ранг 2)
- *простой конус*[2] $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ (ранг 3)

Поскольку ни на одной из особых квадрик нет трёх попарно скрещивающихся прямых, мы заключаем, что любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ лежат на *гладкой* квадрике.

Удобной геометрической моделью гладкой квадрики в $\mathbb{P}_3$ является *квадрика Сегре* $Q_s$ , образованная матрицами ранга 1 в проективном пространстве $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\Bbbk))$ всех $2 \times 2$-матриц:

$$Q_s = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \,\middle|\, \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \tag{2-2}$$

Всякий линейный оператор $\Bbbk^2 \xrightarrow{F} \Bbbk^2$ ранга 1 имеет одномерное ядро и одномерный образ, т. е. определяет единственные с точностью до пропорциональности вектор $v \in \Bbbk^2$ и ковектор $\xi \in {\Bbbk^2}^*$, такие что $\mathrm{im}\,(F)$ натянут на $v$, а $\ker(F) = \mathrm{Ann}\,(\xi)$. Действие $F$ на произвольный вектор $u \in \Bbbk^2$ задаётся в этом случае формулой

$$F(u) = \xi(u) \cdot v\,. \tag{2-3}$$

Оператор $F$, действующий по таком правилу, называется *тензорным произведением* ковектора $\xi$ и вектора $v$ и обозначается $\xi \otimes v$. Если $v = (x_0 : x_1)$, а $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$, то матрица $F = \xi \otimes v$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \tag{2-4}$$

Упражнение 2.5. Убедитесь, что любая $m \times n$-матрица $(a_{ij})$ ранга 1 получается умножением столбца высоты $n$ справа на строку ширины $m$, т. е. имеет $a_{ij} = \xi_i x_j$ для подходящих $(\xi_i)$ и $(x_j)$.

Таким образом возникает *отображение Сегре* $s : \mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3$ , где $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(\Bbbk^2)$, $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}\left(\mathrm{End}(\Bbbk^2)\right)$, которое переводит $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1$ в оператор $\xi \otimes v$ с матрицей (2-4) и биективно отображает $\mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1$ на квадрику Сегре $Q_s \subset \mathbb{P}_3$ . Два семейства координатных прямых на $\mathbb{P}_1^{\times} \times \mathbb{P}_1$ переходят при этом в два семейства прямых на $Q_s$ : прямая $\xi = \mathrm{const}$ изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением $(\xi_0 : \xi_1)$ между столбцами, а прямая $v = \mathrm{const}$ — матрицами с фиксированным отношением $(x_0 : x_1)$ между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются. Каждая точка $Q_s$ является точкой пересечения пары прямых из различных семейств. Никаких других прямых на квадрике Сегре нет, поскольку всякая прямая, лежащая на $Q_s$ и проходящая через какую-нибудь точку $p \in Q_s$ содержится в плоской конике $Q_s \cap T_p Q_s$, которая исчерпывается парой проходящих через $p$ прямых из описанных выше двух семейств.

Упражнение 2.6. Покажите, что следующие три свойства оператора $\Bbbk^2 \xrightarrow{F} \Bbbk^2$ попарно эквивалентны:
а) $F \in T_{\xi\otimes v} Q_s$ ; б) $F(\mathrm{Ann}\,(\xi)) \subset \Bbbk \cdot v$ ; в) $F = \xi \otimes w + \eta \otimes v$ для некоторых $\eta \in \mathbb{P}_1^{\times}$, $w \in \mathbb{P}_1$ ;
и что действие ассоциированного с невырожденным оператором $F \in \mathrm{GL}(\Bbbk^2)$ дробно линейного изоморфизма $\overline{F} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ на произвольную точку $p = \mathrm{Ann}\,(\xi) \in \mathbb{P}_1$ допускает следующее геометрическое описание: проведём в $\mathbb{P}_3$ плоскость $\pi$ через точку $F$ и отвечающую $\xi$ прямолинейную образующую $L' = \xi \times \mathbb{P}_1$ на квадрике Сегре $Q_s \subset \mathbb{P}_3$; тогда $\pi$ пересечёт $Q_s$ по распавшейся конике, состоящей из образующей $L'$ и ещё одной образующей $L''$, лежащей в другом семействе, и имеющей вид $L'' = \mathbb{P}_1 \times v$ , где $v = \overline{F}(p)$.

**2.6.6.** СЛЕДСТВИЕ. *Через любые три попарно непересекающиеся прямые в $\mathbb{P}_3$ проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.*

Доказательство. Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе. □

[1] т. е. объединение двух плоскостей $x_0 = \pm i\, x_1$, или, что то же самое, линейное соединение особой прямой $(e_2, e_3)$ и пары точек $(1 : \pm i : 0 : 0)$, составляющих неособую квадрику на дополнительной прямой $(e_0, e_1)$

[2] т. е. линейное соединение одной особой точки с невырожденной коникой в дополнительной плоскости

Упражнение 2.7. Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а) $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$ б) $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$ в$^*$) $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$ г$^*$) $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ (найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых[1]).

**2.7. Линейные подпространства на невырожденной квадрике.** Факт наличия двух семейств прямолинейных образующих, заметающих невырожденную квадрику в $\mathbb{P}_3$, распространяется в старшие размерности следующим образом. Рассмотрим $n$-мерную гладкую квадрику

$$Q_n = V(q) \subset \mathbb{P}_{n+1} = \mathbb{P}(V)$$

и лежащее на ней линейное подпространство $L = \mathbb{P}(W)$. Условие $L \subset V(q)$ означает, что

$$\widehat{q}(W) \subset \operatorname{Ann}(W) .$$

Поскольку форма $q$ невырождена, её корреляция $\widehat{q} : V \longrightarrow V^*$ инъективна. Стало быть,

$$\dim W = \dim \widehat{q}(W) \leqslant \dim \operatorname{Ann}(W) = \dim V - \dim W \ ,$$

откуда $\dim(W) \leqslant \dim(V)/2 = \frac{n}{2} + 1$ и $\dim L \leqslant [n/2]$, где $[\,*\,]$ означает целую часть. Иными словами, на гладкой $n$-мерной квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ нет проективных подпространств размерности большей, чем половина размерности квадрики.

С другой стороны, всякое подпространство $L \subset Q_{n-1}$, проходящее через произвольно заданную точку $p \in Q_n$, содержится в пересечении $Q_n \cap T_pQ_n$ этой квадрики с касательной гиперплоскостью в точке $p$. Оказывается, что такое пересечение всегда является особой квадрикой в $\mathbb{P}_n = T_pQ_n$ с единственной особой точкой $p$, т. е. представляет собой конус с вершиной в точке $p$ над неособой квадрикой $Q_{n-2}$, лежащей в не проходящей через $p$ гиперплоскости $\mathbb{P}_{n-1} \subset T_pQ_n$ . Это вытекает из следующего более общего утверждения:

**2.7.1.** ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Сечение неособой квадрики $Q$ произвольной гиперплоскостью $\Pi$ либо является неособой квадрикой в $\Pi$, либо имеет единственную особую точку $p \in \Pi \cap Q$, причём второе означает, что $\Pi = T_pQ$ касается квадрики в точке $p$.*

Доказательство. Пусть $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ и $\Pi = \mathbb{P}(W)$. Первое утверждение следует из оценки:

$$\dim \ker(\widehat{q}|_W) = \dim\bigl(W \cap \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W)\bigr) \leqslant \dim \widehat{q}^{-1}(\operatorname{Ann} W) = \dim \operatorname{Ann} W = \dim V - \dim W = 1 \ .$$

Если ядро ограничения $\widehat{q}|_W$ не нулевое, а одномерное с базисом $p$, то $p \in Q \cap \Pi$ имеет $\operatorname{Ann}(\widehat{q}(p)) = W$ , откуда $T_pQ = \Pi$. Наоборот, если $\Pi = T_pQ = \mathbb{P}(\operatorname{Ann}\widehat{q}(p))$, то вектор $p \in \operatorname{Ann}\widehat{q}(p)$ лежит в ядре ограничения $\widehat{q}$ на $\operatorname{Ann}\widehat{q}$. □

**2.7.2.** СЛЕДСТВИЕ. *$[n/2]$-мерные проективные подпространства, лежащие на неособой $n$-мерной квадрике $Q_n$ и проходящие через произвольно заданную точку $p \in Q_n$, взаимно однозначно соответствуют всем $([n/2]-1)$-мерным проективным подпространствам, лежащим на неособой $(n-2)$-мерной квадрике $Q_{n-2}$ . Подпространств размерности $> [n/2]$ на неособой $n$-мерной квадрике $Q_n$ нет.* □

**2.7.3.** Пример: гладкие квадрики над алгебраически замкнутым полем. Предыдущее следствие позволяет последовательно описывать изменение геометрии линейных подпространств, лежащих на неособой квадрике $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ над алгебраически замкнутым полем. На нульмерной и одномерной гладких квадриках $Q_0 \subset \mathbb{P}_1$ и $Q_1 \subset \mathbb{P}_2$ лежат только 0-мерные подпространства. Следующие две квадрики — двумерная $Q_2 \subset \mathbb{P}_3$ и трёхмерная $Q_3 \subset \mathbb{P}_4$ — не содержат плоскостей, но каждая точка $p \in Q_2$ лежит на паре прямых, проходящих через $p$ и две точки неособой квадрики $Q_0 \subset T_pQ_2 \setminus \{p\}$, а через каждую точку $p \in Q_3$ проходит одномерное семейство прямых, образующих конус с вершиной $p$ над гладкой коникой $Q_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$. Далее, гладкая четырёхмерная квадрика $Q_4 \subset \mathbb{P}_5$ не содержит 3-мерных подпространств, но через любую точку $p \in Q_4$ проходят два пучка[2] плоскостей, взаимно однозначно соответствующих двум семействам прямых на квадрике Сегре $Q_2 \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset T_pQ_4 \setminus \{p\}$ , и т. д.

[1] УКАЗАНИЕ: примените «метод геометрических мест»: рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

[2] напомним, что *пучок* в этом контексте означает семейство фигур, образующих *прямую* в подходящем проективном пространстве фигур, ср. с (n° 1.6)