Задачи переходного периода или словарик «линейная алгебра – проективная геометрия»

Г$9\frac{1}{2}$◇1. Рассмотрим в $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ какую-нибудь аффинную карту $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) = 1\}$ с произвольным ненулевым $\xi \in V^*$ и какое-нибудь k-мерное проективное подпространство $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$, где $W \subset V$, и $\dim W = k+1$. Покажите, что либо $K \cap U_\xi = \varnothing$, либо $K \cap U_\xi$ является k-мерным аффинным подпространством в U_ξ. Верно ли, что подмножество в $\mathbb{P}(V)$ тогда и только тогда имеет вид $\mathbb{P}(W)$ для некоторого $(k+1)$-мерного векторного подпространства W, когда во всех аффинных картах, имеющих с ним непустое пересечение, оно видно как k-мерное аффинное подпространство?

Г$9\frac{1}{2}$◇2. Пусть основное поле конечно и состоит из q элементов. Сколько всего имеется
- **а)** точек, прямых, ... , k-мерных аффинных подпространств в $\mathbb{A}^n$?
- **б)** точек, прямых, ... , k-мерных проективных подпространств в $\mathbb{P}_n$?

Г$9\frac{1}{2}$◇3. Покажите, что для любых двух проективных подпространств $K, L \subset \mathbb{P}_n$ выполняется неравенство $\dim(K \cap L) \geqslant \dim K + \dim L - n$ (в частности, любые две прямые на $\mathbb{P}_2$ пересекаются).

Г$9\frac{1}{2}$◇4. Пусть $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n$ — непересекающиеся подпространства размерностей d_1 и d_2, таких что $d_1 + d_2 = n-1$. Покажите, что для любой точки $p \in \mathbb{P}_n \setminus (L_1 \sqcup L_2)$ существует единственная прямая $\ell \ni p$, пересекающая как L_1, так и L_2.

Г$9\frac{1}{2}$◇5. Пространства $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ и $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$ называются *двойственными*. Покажите, что
- **а)** каждое из них является пространством гиперплоскостей в другом;
- **б)** правило $\mathbb{P}(W) \longleftrightarrow \mathbb{P}(\mathrm{Ann}\,(W))$ устанавливает оборачивающую включение биекцию между k-мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n$ и $(n-k-1)$–мерными проективными подпространствами в $\mathbb{P}_n^\times$;
- **в)** с учётом (а) биекция из (б) имеет следующее геометрическое описание: подпространству $H \subset \mathbb{P}_n$ соответствует множество гиперплоскостей, содержащих это подпространство (в частности, это множество автоматически является проективным подпространством размерности $n - \dim H - 1$).

Г$9\frac{1}{2}$◇6. Покажите, что всякий линейный изоморфизм $F : V \xrightarrow{\sim} V$ корректно определяет биекцию $\overline{F} : \mathbb{P}(V) \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}(V)$ по правилу $v \mapsto F(v)$, причём биекции $\overline{F}$ и $\overline{G}$, индуцированные двумя линейными изоморфизмами F и G, совпадают тогда и только тогда, когда $F = \lambda \cdot G$ для некоторого ненулевого $\lambda \in \Bbbk$.

Г$9\frac{1}{2}$◇7. Нетождественный автоморфизм $\overline{F}$ прямой $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}_1(U)$, индуцированный линейным автоморфизмом $U \xrightarrow{F} U$, называется *инволюцией*, если $\overline{F}^2 = \mathrm{Id}$. Покажите, что всякая инволюция имеет (над алгебраически замкнутым полем) ровно две различных неподвижных точки.

Г$9\frac{1}{2}$◇8 (перекрёстная ось[1]). На плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ заданы две прямые $\ell_1 = \mathbb{P}(U_1)$ и $\ell_2 = \mathbb{P}(U_2)$ (где $U_1, U_2 \subset V$ — какие-то двумерные векторные подпространства). Пусть также задана биекция $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ индуцированная некоторым линейным изоморфизмом $f : U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$. Опишите ГМТ пересечения прямых $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$, где $x \neq y$ пробегают ℓ_1.

Г$9\frac{1}{2}$◇9 (теорема Дезарга[2]). Даны два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Верно ли, что три точки пересечения пар их соответственных[3] сторон коллинеарны тогда и только тогда, когда три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке?

[1] по английски *cross-axis*

[2] треугольники, для которых выполнены оба условия этой задачи, называются *перспективными*

[3] т. е. поименованных одинаковыми буквами