Прямые, квадрики, кубики...

Г13◇1. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

Г13◇2. Используя только линейку, постройте треугольник, вписанный в данную гладкую конику C так, что прямые, содержащие его стороны, проходят через 3 заданные точки. Сколько решений может иметь эта задача?

Г13◇3. Сформулируйте и решите задачу, проективно двойственную к предыдущей.

Г13◇4. Покажите, что два треугольника на $\mathbb{P}_2$ описаны около одной коники тогда и только тогда, когда они вписаны в одну конику.

Г13◇5 (поризм Понселе для треугольников). Даны две гладкие коники $C_1, C_2 \subset \mathbb{P}_2$. Покажите, что если существует треугольник, одновременно вписанный в C_1 и описанный около C_2, то такой треугольник можно нарисовать с вершиной в любой точке на C_1.

Г13◇6. В $\mathbb{P}_3$ заданы **а)** 2 **б)** 3 попарно непересекающихся прямых. Опишите ГМТ, заметаемых всевозможными прямыми, которые их пересекают.

Г13◇7. Сколько прямых пересекает четыре данных попарно скрещивающихся прямых
а) в $\mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ **б)** в $\mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ **в)** в $\mathbb{C}^3$ **г)** в $\mathbb{R}^3$
(найдите все возможные ответы и те, что устойчивы к малым шевелениям заданных прямых).

Г13◇8. Спроектируем кубику Веронезе $C_3 \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(S^3U)$ (см. зад. 10◇3 а))
а) из точки t_0^3 на плоскость $(3\,t_0^2t_1,\ 3\,t_0t_1^2,\ t_1^3)$
б) из точки $3\,t_0^2t_1$ на плоскость $(t_0^3,\ 3\,t_0t_1^2,\ t_1^3)$
в) из точки $3\,t_0^2t_1 + t_1^3$ на плоскость $(t_0^3 + 3\,t_0t_1^2,\ 3\,t_0^2t_1,\ 3\,t_0t_1^2)$.
Напишите параметрические и «внешние» уравнения получающихся таким образом кривых в однородных координатах, а также в аффинных координатах в каждой из трёх стандартных карт на плоскости – образе, и нарисуйте все эти 9 аффинных кривых.

Г13◇9. Покажите, что всякая рациональная плоская кривая степени d получается проектированием кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ на подходящую плоскость $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_d$.

Г13◇10*. Выведите из зад. Г13◇8, что неособая[1] кубическая кривая $C \subset \mathbb{P}_2$ не допускает рациональной параметризации.

Г13◇11*. Отождествим $\mathbb{P}_1$ с гладкой коникой $C \subset \mathbb{P}_2$ при помощи отображения Веронезе. Множество $\Gamma \subset \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$, заданное в однородных координатах уравнением $f(x,y) = 0$, где $f \in \Bbbk[x_0, x_1, y_0, y_1]$ симметричен: $f(x,y) = f(y,x)$ и однороден степени 2 как по $x = (x_0 : x_1)$, так и по $y = (y_0 : y_1)$, называется *симметричным алгебраическим 2–2 соответствием* на C. Пары точек $(p,q) \in \Gamma$ называются *соответственными* или же *образом* и *прообразом* друг друга, что записывается как $q \in \Gamma(p)$, $p \in \Gamma^{-1}(q)$.
а) Сколько образов и прообразов может быть у данной точки?
б) Сколько точек соответствуют сами себе?
Покажите, что для любого такого соответствия существуют коники Q_1 и Q_2, такие что $a, b \in C$ соответственны тогда и только тогда, когда
в) они сопряжены относительно Q_1 (т. е. b лежит на поляре a относительно Q_1)
г) прямая (a,b) касается Q_2.

Г13◇12* (поризм Понселе). Фиксируем натуральное $n \geqslant 3$ и две различных гладких коники $C_1, C_2 \in \mathbb{P}_2$. Покажите, что если существует n-угольник, одновременно вписанный в C_1 и описанный около C_2, то такой многоугольник можно нарисовать с вершиной в любой точке $p \in C_1$.

[1] без самопересечений и заострений, или, формально, без таких точек $p \in C$, что ограничение уравнения кривой C на любую проходящую через p прямую имеет в p кратный корень