Аффинные и евклидовы коники

Терминология. Рассмотрим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ с прямоугольными координатами (x_1, x_2) как множество вещественных точек стандартной аффинной карты U_0 комплексной проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ с однородными координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$. Прямая $x_0 = 0$ называется *бесконечностью* и обозначается ℓ_∞, коника $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ называется *изотропной* и обозначается I, точки пересечения $\ell_\infty \cap I$ называется *изотропными направлениями* и обозначается $I_\pm = (0 : 1 : \pm i)$. Коника на $\mathbb{P}_2$ называется *вещественной*, если её уравнение в фиксированных выше координатах имеет вещественные коэффициенты. Гладкая вещественная коника называется соответственно *параболой*, *гиперболой* или *эллипсом*, если она касается ℓ_∞ или пересекает ℓ_∞ по двум вещественным или двум комплексно сопряжённым точкам. Точка F называется *фокусом* коники C, если прямые $(FI_\pm)$ касаются C. Поляры фокусов называются *директрисами*. Полюс бесконечности называется *центром* коники. Прямые, проходящие через центр, называются *диаметрами*. Диаметры, проходящие через бесконечные точки коники, называются *асимптотами*. Коники с конечным центром (гиперболы и эллипсы) называются *центральными*. На пучке диаметров центральной коники есть две инволюции: *сопряжение* (неподвижные точки — асимптоты) и *перпендикулярность* (неподвижные точки — изотропные направления). Два одновременно сопряжённых и перпендикулярных друг другу диаметра называются *главными осями* центральной коники.

Г12◇1. Покажите, что диаметр центральной коники делит пополам все хорды, параллельные сопряжённому диаметру.

Г12◇2. Покажите, что две вещественные прямые пересекаются под прямым углом, если и только если их направления гармоничны изотропным направлениям.

Г12◇3. Покажите, что главные оси существуют и перпендикулярны, и напишите уравнение центральной коники в главных осях.

Г12◇4 (окружности). Покажите, что следующие свойства вещественной коники C попарно эквивалентны: **а)** C неособа, имеет конечную вещественную точку и проходит через $I_\pm$;
б) C имеет $\geqslant 3$ неколлинеарных конечных вещественных точек и проходит через $I_\pm$;
в) C центральна и имеет более одной пары перпендикулярных сопряжённых диаметров;
г) C центральна и любые два её сопряжённых диаметра перпендикулярны.

Г12◇5. Покажите, что отличная от окружности центральная коника имеет ровно 4 фокуса, два из которых вещественны и лежат на одной главной оси, а два других — невещественны, комплексно сопряжены и лежат на другой главной оси.

Г12◇6. Как устроены директрисы центральной коники?

Г12◇7. Как устроены фокусы и директрисы у параболы? Дайте определение оси параболы и покажите, что она под прямым углом пересекает параболу в конечной точке.

Г12◇8. Покажите, что касательные к параболе, восстановленные в концах фокальной хорды, пересекаются под прямым углом на директрисе.

Г12◇9* (директор коники). Покажите, что ГМТ, из которых данная центральная коника C видна под прямым углом, это концентричная C окружность (т. н. *директор* коники C).

Г12◇10* (гипербола Аполлония). Опишите ГМТ пересечений вращающегося диаметра данной коники с перпендикуляром, опущенным из данной точки на сопряжённый диаметр.

Г12◇11*. Сколько перпендикуляров можно опустить из данной точки на данную конику?

Г12◇12* (цепочка Клиффорда). Четыре прямых без тройных пересечений образуют 4 треугольника. Их описанные окружности всегда пересекаются в одной точке $c_{4,1}$, и через центры этих окружностей проходит окружность $S_{4,1}$. Пять прямых без тройных пересечений содержат 5 четвёрок прямых. Точки $c_{4,1}$ этих четвёрок всегда лежат на одной окружности $C_{5,1}$, а окружности $S_{4,1}$ пересекаются в одной точке $s_{5,1}$, и через их центры проходит окружность $S_{5,2}$. Шесть прямых без тройных пересечений содержат 6 пятёрок прямых. Их окружности $C_{5,1}$ пересекаются в одной точке $c_{6,1}$, и через их центры проходит окружность $C_{6,2}$; точки $s_{5,1}$ лежат на одной окружности $S_{6,1}$; окружности $S_{5,2}$ пересекаются в одной точке $s_{6,2}$, и через их центры проходит окружность $S_{6,3}$. И так далее… Почему?