Проективные коники

Г11⋄1. Напишите явное уравнение[1], задающее пучок коник, проходящих через точки $a = (1 : 0 : 0)$, $b = (0 : 1 : 0)$, $c = (0 : 0 : 1)$, $d = (1 : 1 : 1)$. Сколько в нём вырожденных коник?

Г11⋄2. Прямая $(pq) \subset \mathbb{P}_n$ пересекает гладкую квадрику $Q \subset \mathbb{P}_n$ в точках r, s. Верно ли, что точка p лежит на поляре точки q относительно Q тогда и только тогда, когда $[p, q; r, s] = -1$?

Г11⋄3. Назовём двойным отношением $[a, b, c, d]$ четырёх точек гладкой коники C двойное отношение четырёх прямых $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$ в пучке прямых с центром в некоторой пятой точке $p \in C$. Покажите, что оно не зависит от выбора p и что две хорды C тогда и только сопряжены[2], когда пары их концов гармоничны на конике.

Г11⋄4. Пусть в условии задачи Г10⋄8 точки a, b, c, d лежат на гладкой конике $C \in \mathbb{P}_2$. Покажите, что треугольник xyz автополярен относительно C.

Г11⋄5. Покажите, что два треугольника тогда и только тогда перспективны (см. зад. Г$9\frac{1}{2}$⋄9), когда один из них полярен другому относительно некоторой коники.

Г11⋄6. Каково уравнение гладкой коники C в базисе (e_0, e_1, e_2), если треугольник $e_0e_1e_2$
а) вписан **б)** описан **в)** автополярен?

Внутренняя проективная геометрия гладкой коники. Отождествим гладкую конику $C \subset \mathbb{P}_2$ с коникой Веронезе, т. е. будем считать, что $\mathbb{P}_2$ есть пространство пар точек на $\mathbb{P}_1$, а C — множество двойных точек. Будем называть *внутренними однородными координатами* двойной точки $2p \in C$ однородные координаты точки $p \in \mathbb{P}_1$ относительно какого-нибудь базиса на $\mathbb{P}_1$. Дробно линейное преобразование коники C — это дробно линейное преобразование её внутренних однородных координат.

Г11⋄7. Покажите, что двойное отношение из зад. Г11⋄3 равно двойному отношению внутренних однородных координат.

Г11⋄8 (перекрёстная ось). Дано дробно линейное преобразование $\varphi : C \longrightarrow C$. Опишите ГМТ пересечений прямых $(a\varphi(b)) \cap (b\varphi(a))$ для всех $a, b \in C$.

Г11⋄9. Представьте дробно линейное преобразование $\gamma : C \longrightarrow C$, заданное своим действием на три данные точки, как композицию проекции C на некоторую прямую ℓ из некоторой точки $p_1 \in C$ и проекции прямой ℓ обратно на C из ещё одной точки $p_2 \in C$. Одной линейкой укажите подходящие p_1, p_2, ℓ и неподвижные точки γ.

Г11⋄10. Дробно линейное преобразование, обратное самому себе, называется *инволюцией*. Покажите, что любая инволюция на конике высекается пучком прямых с центром вне этой коники, и для любых двух различных точек $p, q \in C$ существует единственная инволюция коники C, имеющая p и q неподвижными точками.

Г11⋄11. Одной линейкой постройте две касательные к данной конике C из данной точки $p \notin C$.

Г11⋄12. Даны две различных инволюции $\sigma_1, \sigma_2 : C \longrightarrow C$. Сколько существует точек $p \in C$, таких что $\sigma_1(p) = \sigma_2(p)$?

Г11⋄13. Покажите, что две разных инволюции коммутируют, если и только если пары их неподвижных точек гармоничны, а три разных инволюции тогда и только тогда составляют (вместе с Id_C) группу $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$, когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный треугольник.

Г11⋄14. Покажите, что шестиугольник описан около коники тогда и только тогда, когда три его главных диагонали пересекаются в одной точке.

Г11⋄15. Сколько коник касается пяти заданных прямых на $\mathbb{P}_2$, никакие три из которых не пересекаются в одной точке? Верно ли, что для любого проективного изоморфизма $\gamma : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ между двумя прямыми ℓ_1, $\ell_2 \in \mathbb{P}_2$ существует единственная коника C_γ, касающаяся обеих прямых, такая что $y = \gamma(x) \iff$ прямая (xy) касается C?

---

[1] т. е. квадратичную форму, коэффициенты которой линейно зависят от двух параметров

[2] т. е. полюс прямой, высекающей одну из них, лежит на прямой, высекающей другую