Проективные пространства

Г10◇1. В стандартной карте $U_0 \subset \mathbb{P}_2$ даны кривые **а)** $y = x^2$ **б)** $y = x^3$ **в)** $y^2 + (x-1)^2 = 1$ **г)** $y^2 = x^2(x+1)$. Напишите их уравнения в картах U_1 и U_2 и нарисуйте все эти 12 кривых.

Г10◇2. Вложим евклидову плоскость $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{CP}_2$ в качестве действительной части стандартной аффинной карты U_0. Найдите в $\mathbb{CP}_2$ две точки, лежащие на всех кривых степени 2, видных в $\mathbb{R}^2$ как окружности. Верно ли, что любая коника, проходящая через эти две точки и имеющая хотя бы 3 неколлинеарные точки в $\mathbb{R}^2$, будет видна в $\mathbb{R}^2$ как окружность?

Г10◇3 (рациональная нормальная кривая). Рассмотрим 2-мерное векторное пространство U линейных форм $\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$ от переменных (t_0, t_1) с однородной координатой $(\alpha_0 : \alpha_1)$ на $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ и пространство $S^d U$ однородных многочленов $\sum\limits_{n=0}^{d} \binom{d}{n} a_n t_0^n t_1^{d-n}$ степени d от (t_0, t_1) с однородными координатами $(a_0 : a_1 : \ \dots : a_n)$ на $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$. Покажите, что все описанные ниже кривые $C \subset \mathbb{P}_d$ переводятся друг в друга подходящими линейными проективными автоморфизмами.

а) **(кривая Веронезе)** C есть образ отображения $c_d : \mathbb{P}(U) \xhookrightarrow{\psi \mapsto \psi^d} \mathbb{P}(S^d U)$.

б) $C \subset \mathbb{P}(S^d U)$ задаётся системой квадратных уравнений $\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_d \end{pmatrix} = 1$

в) C — образ любого отображения $\mathbb{P}_1 \xrightarrow{F} \mathbb{P}_n$ заданного в однородных координатах формулой $(x_0 : x_1) \longmapsto (f_0(x_0, x_1) : f_1(x_0, x_1) : \ \cdots \ : f_d(x_0, x_1))$, где $f_0, f_1, \dots, f_d \in \Bbbk[x_0, x_1]$ — линейно независимые однородные многочлены степени d.

г) C — образ отображения $\varphi_{p_0, p_1, \dots, p_d} : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_d$ заданного в однородных координатах формулой $x = (x_0 : x_1) \longmapsto \left(\frac{1}{\det(p_0, x)} : \frac{1}{\det(p_1, x)} : \ \cdots \ : \frac{1}{\det(p_d, x)} \right)$, где $p_\nu = (\alpha_\nu : \beta_\nu) \in \mathbb{P}_1$ — попарно разные точки, и $\det(p_\nu, x) = \alpha_\nu x_1 - \beta_\nu x_0$.

д) Зафиксируем $n+3$ точки $p_1, p_2, \dots, p_n$, a, b, $c \in \mathbb{P}_n$, никакие $(n+1)$ из которых не лежат в одной гиперплоскости, обозначим через $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$ пучок гиперплоскостей, проходящий через $n-1$ точек p_ν — все, кроме p_i, и зададим линейные проективные изоморфизмы $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$ между этими пучками так, чтобы 3 гиперплоскости пучка ℓ_j, проходящие через точки a, b, c, переходили в аналогичные 3 гиперплоскости пучка ℓ_i; кривая $C = \bigcup\limits_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \ldots \cap \psi_{n1}(H)$.

Г10◇4. Любые ли $n+3$ точки в $\mathbb{P}_n$, никакие $n+1$ из которых линейно не зависимы, лежат на рациональной нормальной кривой?

Г10◇5. Любые ли $m+1$ точек кривой Веронезе $C_d \subset \mathbb{P}_d$ линейно независимы при $1 \leqslant m \leqslant d$?

Г10◇6. Покажите, что для любой упорядоченной четвёрки разных точек p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathbb{P}_1$ *двойное отношение* $[p_1, p_2; p_3, p_4] \overset{\text{def}}{=} (\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)) : (\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3))$ корректно определено и не зависит от выбора координат, и что две четвёрки точек проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда их двойные отношения одинаковы.

Г10◇7. Пусть $[p_1, p_2; p_3, p_4] = \vartheta$. Найдите $[p_{\sigma(1)}, p_{\sigma(2)}; p_{\sigma(3)}, p_{\sigma(4)}]$ для всех перестановок $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ и опишите все ϑ, для которых число различных ответов будет меньше, чем для общего ϑ.

Г10◇8 (четырёхвершинник). 6 прямых, соединяющих всевозможные пары из четырёх точек $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$, никакие 3 из которых не коллинеарны, попарно пересекаются ещё в трёх точках x, y, z, которые соединяются между собою ещё тремя прямыми. Покажите, что все три четвёрки прямых, выделенных таким образом в пучках прямых с центрами в x, y, z, являются гармоническими[1].

[1] точки p_1, p_2, p_3, $p_4 \in \mathbb{P}_1$ называются *гармоническими*, если $[p_1, p_2; p_3, p_4] = -1$