Письменный экзамен по геометрии за 3 модуль

задачи можно решать в любом порядке; правильное решение каждой задачи оценивается в 20%

Задача 1. На прямых (AB), (BC), $(CA) \subset \mathbb{P}_2$ взяли точки

$$A' = (1:0:0) \in (BC)\,, \quad B' = (0:1:0) \in (AC)\,, \quad C' = (0:0:1) \in (AB)\,.$$

Оказалось, что прямые (AA'), (BB') и (CC') пересекаются в точке $(1:1:1)$. Найдите координаты вершин $\triangle ABC$.

Задача 2. Одной линейкой постройте касательную к данной конике C в данной точке $p \in C$.

Задача 3. Две коники C_0 и C_1 на проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем имеют матрицы Грама G_0 и G_1. Верно ли, что если кубическая форма $\det(t_0G_0 + t_1G_1)$ от переменных $(t_0 : t_1)$ не обращается тождественно в нуль и имеет кратный корень на $\mathbb{P}_1$, то в пучке коник (C_0, C_1) имеется двойная прямая? Сколько точек пересечения могут иметь две гладких коники в таком пучке?

Задача 4. Напишите (содержащее необходимые параметры) уравнение, задающее все евклидовы коники с фокусами в точках $(1,-1)$ и $(-1,1)$. Сколько общих касательных имеется у всех этих коник на комплексной проективной плоскости?

Задача 5. Покажите, что все хорды гладкой коники C, видимые из данной точки $p \in C$ под прямым углом, пересекаются в одной точке q, причём прямая (pq) перпендикулярна касательной T_pC .