Письменный экзамен по геометрии за 3 модуль

задачи можно решать в любом порядке; правильное решение каждой задачи оценивается в 20% (таким образом, для получения за эту работу 100%-процентного вклада в итоговую отметку за 3-й модуль достаточно правильно решить любые 5 задач); в случае набора более 100%, перебранные баллы также будут учтены при выставлении итоговой отметки за 3-й модуль

Г11◇1. При каком условии на три прямые ℓ_0, ℓ_1, ℓ_2 на проективной плоскости $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ в пространстве V можно выбрать базис так, чтобы каждая прямая ℓ_i была бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты $U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_i \neq 0\}$?

Г11◇2. Могут ли две гладкие коники на проективной плоскости над алгебраически замкнутым полем пересекаться ровно по **а)** одной **б)** двум **в)** трём точкам? Если да, приведите пример таких коник, если нет, объясните, почему.

Г11◇3. Пусть инволюция[1] $\sigma : \mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_1$ имеет неподвижные точки p и q. Верно ли, что для точек a и b, отличных от p и q, условие $\sigma(a) = b$ равносильно гармоничности[2] точек a, b относительно точек p, q ?

Г11◇4. Напишите явное уравнение на однородные координаты точек

$$p = (p_0 : p_1 : p_2) \quad \text{и} \quad q = (q_0 : q_1 : q_2)$$

на комплексной проективной плоскости, равносильное тому, что прямая (pq) касается коники

$$x_0^2 - 2\,x_0x_1 + 2\,x_1^2 - 2\,x_1x_2 + x_2^2 = 0\,.$$

Г11◇5. Из скольких точек состоит проективная квадрика $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$ в $\mathbb{P}_3$ над полем $\mathbb{F}_9$ из 9 элементов[3]?

Г11◇6. Верно ли, что точка, симметричная фокусу параболы относительно какой-нибудь касательной к этой параболе прямой, всегда лежит на директрисе?

Г11◇7. Зафиксируем на комплексной проективной плоскости шесть точек $p_1, p_2, \dots, p_6$, не лежащие на одной конике и такие, что никакие три из них не коллинеарны, и обозначим через $\mathbb{P}_N$ пространство кубических кривых, проходящих через все точки $p_1, p_2, \dots, p_6$. Найдите N. Изменится ли ответ, если все шесть точек лежат на одной конике?

[1] напомним, что *инволюцией* в этом контексте называется нетождественное дробно линейное преобразование, обратное самому себе

[2] напомним, что пары точек a, b и p, q называются *гармоническими* по отношению друг к другу, если двойное отношение $[\,a, b, p, q\,] = -1$

[3] напомним, что элементы поля $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[x]/(x^2+1)$ имеют вид $a + ib$, где $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$, и $i^2 \equiv -1 \pmod 3$