Математический анализ — I

Листок 24

В этом листочке слово «гладкий» означает «бесконечно дифференцируемый».

Гладким векторным полем на области (многообразии) D называется отображение, сопоставляющее каждой точке $x \in D$ касательный вектор $v(x) \in T_x D$ в этой точке, причем в координатах это отображение должно записываться гладкими функциями. Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ — координаты в области D. Векторное поле, сопоставляющее каждой точке $x \in D$ базисный вектор e_i, приложенный к точке x, обозначается $\frac{\partial}{\partial x^i}$. Это обозначение весьма естественно: результат применения дифференциала произвольной гладкой функции $f\colon D \to \mathbb{R}$ в точке x к вектору e_i равен $\frac{\partial f(x)}{\partial x^i}$. Любое гладкое векторное поле в координатах записывается так:

$$v(x) = \sum_{i=1}^{n} v^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} \ ,$$

где координаты $v^1(x), \dots, v^n(x)$ вектора $v(x)$ — гладкие функции.

1) Рассмотрим базисные векторные поля $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ для декартовой системы координат на плоскости и базисные векторные поля $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ для полярной системы координат на плоскости. Выразите $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ через $\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$ и наоборот. Изобразите эти векторные поля на плоскости.

2) Запишите в полярной системе координат векторное поле $x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$ и изобразите его.

3) Запишите в декартовой системе координат векторное поле $r^2 \cos\varphi \frac{\partial}{\partial r} + r \sin\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi}$ и изобразите его.

4) Запишите в полярной системе координат векторное поле $x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y}$ и изобразите его.

5) *Коммутатором векторных полей* u и v называется такое векторное поле w, что дифференцирование вдоль него является коммутатором дифференцирований вдоль u и v.

   Проверьте, что это определение корректно (то есть, что коммутатор дифференцирований вдоль произвольных гладких векторных полей является дифференцированием вдоль однозначно определенного векторного поля).

6) Найдите коммутаторы векторных полей $r\frac{\partial}{\partial r}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$; $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial \varphi}$.

7) Рассмотрим на сфере в $\mathbb{R}^3$ координаты (θ, φ), $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$:
   $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\theta$.

   Пусть (u, v) — координаты на сфере, заданные *стереографической проекцией* из Южного полюса — точки $(0, 0, -1)$ — на плоскость $x = u, y = v, z = 1$.

   а) Выразите координаты (θ, φ) через координаты (u, v) и наоборот.

   б) Запишите в координатах (θ, φ) векторные поля $\frac{\partial}{\partial u}$ и $\frac{\partial}{\partial v}$.

   в) Запишите в координатах (u, v) векторные поля $\frac{\partial}{\partial \theta}$ и $\frac{\partial}{\partial \phi}$.

   г) Запишите в координатах (θ, φ) векторное поле $(u^2 - v^2)\frac{\partial}{\partial u} + 2uv\frac{\partial}{\partial v}$.

   д) Изобразите все эти поля на сфере.