Математический анализ — I

Листок 16

1) Пусть f, g — комплекснозначные интегрируемые по Коши функции на отрезке $[a, b]$. Докажите, что функция $f \cdot g$ тоже интегрируема по Коши, причем выполнено *неравенство Коши–Буняковского–Шварца*
$$\left|\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx\right|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2dx \cdot \int_a^b |g(x)|^2dx$$
2) Найдите точную верхнюю грань для $\left|\int_0^1 xf(x)dx\right|$ по всем непрерывным комплекснозначным функциям f, для которых $\int_0^1 |f(x)|^2dx = 1$.
3) Нарисуйте кривые в $\mathbb{R}^2$ и найдите их длины:
   а) $y = x^{2/3}$ $(-8 \leqslant x \leqslant 8)$;
   б) $y = \operatorname{ch} x$ $(-c \leqslant x \leqslant c)$;
   в) $x = t - \sin t$, $y = 1 - \cos t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$;
   г) $r = 1 + \cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$, где (r, φ) — полярные координаты на плоскости.
4) Решите следующие уравнения относительно комплексного неизвестного z: а) $e^z + i = 0$; б) $\sin z = 3$; в) $\operatorname{ch} z = i$; г) $\ln(z + i) = 0$.
5) Для отображения $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданного формулой $z \mapsto e^z$, постройте образы линий координатной сетки на плоскости комплексных чисел (то есть линий вида $\operatorname{Re} z = \text{const}$ и $\operatorname{Im} z = \text{const}$).
6) Для отображения $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданного формулой $z \mapsto z^2$,
   а) постройте образ линии $|z| = 2$;
   б) постройте образ линии $\operatorname{Im} z = \sqrt{3}\operatorname{Re} z$;
   в) постройте образ линии $|z - i| = 1$;
   г) постройте образы линий координатной сетки на плоскости комплексных чисел;
   д) постройте прообразы линий координатной сетки на плоскости комплексных чисел.
7) Для отображения $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданного формулой $z \mapsto z^{-1}$,
   а) постройте образ линии $|z| = 2$;
   б) постройте образ линии $\operatorname{Im} z = \sqrt{3}\operatorname{Re} z$;
   в) постройте образ линии $|z - i| = 1$;
   г) постройте образы линий координатной сетки на плоскости комплексных чисел.
8) Для отображения $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, заданного формулой $z \mapsto (z + z^{-1})/2$,
   а) постройте образ линии $|z| = 1$;
   б) постройте образ линии $|z| = 2$;
   в) постройте образ линии $\arg z = 0$;
   г) постройте образ линии $\arg z = \pi/2$;
   д) постройте образ линии $\operatorname{Re} z = 1$;
   е) постройте образы линий координатной сетки на плоскости комплексных чисел;
   ж) постройте образы линий полярной координатной сетки на плоскости комплексных чисел.
9) Найдите коэффициент растяжения r и угол поворота φ для заданных отображений $w = f(z)$ в заданных точках:
   а) $w = e^z$ в точке $z = -1 - i\pi/2$;
   б) $w = \sin z$ в точке $z = 1 + i$;
   в) $w = z^3$ в точке $z = 1 + i$.
10) Выясните, какая часть комплексной плоскости сжимается, а какая растягивается при отображении
   а) $w = e^z$;
   б) $w = \ln z$;
   в) $w = z^{-1}$;
   г) $w = z^3$.