Математический анализ — I

Лекция 4

Построение действительных чисел

Нам понадобится простое, но важное свойство натуральных чисел.

Утверждение 1. *В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел есть наименьший элемент.*

Доказательство. Пусть A — множество натуральных чисел, не содержащее наименьшего элемента. Докажем по индукции, что для любого $n \in \mathbb{N}$ мы имеем $\mathbb{N}_n \cap A = \varnothing$ (напомню, что $\mathbb{N}_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k < \mathbb{N}\}$). Для $n = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что $\mathbb{N}_n \cap A = \varnothing$. Если $\mathbb{N}_{n+1} \cap A \neq \varnothing$, то n — наименьший элемент множества A. Поэтому $\mathbb{N}_{n+1} \cap A = \varnothing$. Следовательно, $(\forall n \in \mathbb{N})\ n \notin A$, то есть A пусто. □

Очевидно, что в любом *конечном* непустом множестве натуральных чисел есть также и наибольший элемент.

Из натуральных чисел мы строим целые, добавляя к натуральным числам нуль и отрицательные числа. Множество целых чисел $A \subseteq \mathbb{Z}$ называется *ограниченным сверху*, если существует целое число $c \in \mathbb{Z}$ такое, что $(\forall a \in A)\ a < c$, и *ограниченным снизу*, если существует целое число $c \in \mathbb{Z}$ такое, что $(\forall a \in A)\ a > c$.

Упражнение 1. Докажите, что в любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества целых чисел есть наибольший элемент, а в любом непустом ограниченном снизу подмножестве — наименьший.

Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ строится как поле частных кольца целых чисел, то есть как множество классов эквивалентности пар $(a, b) \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$, где отношение эквивалентности определено так: $(a, b) \sim (c, d)$, если $ad = bc$. Класс эквивалентности пары (a, b) записывается как $\frac{a}{b}$. Операции сложения и умножения определяются стандартным образом: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. В курсе алгебры вы проверяли, что эти операции определены корректно (то есть результат операции от дробей — классов эквиваленности — $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ не зависит от выбора представителей (a, b) и (c, d) этих классов), и что таким образом получается поле. Нам понадобится еще тот факт, что поле это — упорядоченное.

Поле $\Bbbk$ называется *упорядоченным*, если на нем задано отношение линейного порядка $\leqslant$, удовлетворяющее следующим двум условиям:

1) Для любых элементов a, b, c, d поля $\Bbbk$, если $a \leqslant b$ и $c \leqslant d$, то $a + c \leqslant b + d$.

2) Для любых элементов a, b, c поля $\Bbbk$, если $a \leqslant b$ и $c \geqslant 0$, то $ac \leqslant bc$.

Пусть $\Bbbk$ — упорядоченное поле. Обозначим через $\Bbbk_+$ множество $\{a \in \Bbbk \mid 0 \leqslant a\}$. Легко видеть, что это множество удовлетворяет следующим условиям:

1) $a + b \in \Bbbk_+$ для любых элементов $a, b \in \Bbbk_+$;

2) $ab \in \Bbbk_+$ для любых элементов $a, b \in \Bbbk_+$;

3) $-\Bbbk_+ \cup \Bbbk_+ = \Bbbk$;

4) $-\Bbbk_+ \cap \Bbbk_+ = \{0\}$.

(Через $-\Bbbk_+$ мы обозначаем множество $\{-a \mid a \in \Bbbk_+\}$.)

Пусть, наоборот, в произвольном поле $\Bbbk$ задано подмножество *неотрицательных элементов* $\Bbbk_+$, удовлетворяющее приведенным выше свойствам. Определим на $\Bbbk$ отношение $\leqslant$, полагая $a \leqslant b \Leftrightarrow b - a \in \Bbbk_+$. Несложно проверить, что это отношение задает на $\Bbbk$ структуру упорядоченного поля.

Положим $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{Q}_+ = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}_+, b \in \mathbb{N}\}$. Очевидно, что $\mathbb{Q}_+$ удовлетворяет всем четырем условиям на множество неотрицательных элементов поля. Тем самым, $\mathbb{Q}$ — упорядоченное поле.

Всем хороши рациональные числа, только их недостаточно для построения анализа. Даже корни нельзя извлечь — общеизвестно, что не существует рационального числа r такого, что $r^2 = 2$. Посмотрим, в какой «щели» между рациональными числами мог бы находится отсутствующий в поле $\mathbb{Q}$ квадратный корень из двух.

Положим $A = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < 0 \vee a^2 < 2\}, B = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > 0 \wedge b^2 > 2\}$. Легко видеть, что $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \varnothing$ и $a < b$ для любых $a \in A, b \in B$. Заметим, что в множестве A нет наибольшего элемента, а в множестве B — наименьшего. Действительно, пусть $c \in A$ — наибольший элемент множества A. Поскольку $1 \in A$, мы имеем неравенство $c \geqslant 1$. Положим $\varepsilon = 2 - c^2$. Поскольку $c \in A$, получаем $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Пусть $c_1 = c + \frac{\varepsilon}{3}$. Имеем $c_1^2 = c^2 + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon^2}{9} \leqslant c^2 + \frac{7}{9}\varepsilon < c^2 + \varepsilon = 2$, т. е. $c_1 \in A$. Противоречие. Аналогично доказывается, что в B нет наименьшего элемента.

Постараемся одним махом заполнить все такие щели.

Определение 1. *Сечением* множества рациональных чисел называется его разбиение на два непустых подмножества A и B такие, что $a < b$ для любых $a \in A$, $b \in B$. При этом A называется *нижним множеством* сечения, а B — его *верхним множеством*.

Отметим несколько важных свойств сечений.

Утверждение 2. *Любое сечение (A, B) однозначно определяется своим нижним множеством A. Более того, для любого множества A, удовлетворяющего условиям $A \neq \varnothing$, $A \neq \mathbb{Q}$, $(\forall a, a' \in \mathbb{Q})$ $(a \in A \wedge a' < a) \Rightarrow a' \in A$, существует сечение с нижним множеством A. Аналогично, для любого множества B, удовлетворяющего условиям $B \neq \varnothing$, $B \neq \mathbb{Q}$, $(\forall b, b' \in \mathbb{Q})$ $(b \in B \wedge b' > b) \Rightarrow b' \in B$, существует сечение с нижним множеством B.*

Доказательство. Очевидно. □

Утверждение 3. *Для любого сечения (A, B) и любого положительного рационального числа r существует единственное целое число k такое, что $kr \in A, (k+1)r \in B$.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что единственность k очевидно следует из того, что каждый элемент A меньше каждого элемента B. Докажем существование.

Пусть сначала $r = 1$. Рассмотрим множества $A^0 = A \cap \mathbb{Z}, B^0 = B \cap \mathbb{Z}$. Докажем, что A^0 и B^0 непусты. Действительно, так как A непусто, то найдется число $\frac{p}{q} \in A$, где $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Но тогда $p \geqslant \frac{p}{q}$, поэтому целое число p тоже лежит в A, т. е. $p \in A^0$. Аналогично получаем, что B^0 непусто. Множество A^0 ограничено сверху любым элементом множества B^0. По упражнению 1 в нем существует наибольший элемент. Обозначим его через k. Ясно, что $k \in A, k+1 \in B$, что и требовалось.

Для произвольного положительного r рассмотрим множества $r^{-1}A = \{r^{-1}a \mid a \in A\}$ и $r^{-1}B = \{r^{-1}b \mid b \in B\}$. Ясно, что $(r^{-1}A, r^{-1}B)$ — сечение. По доказанному, существует единственное целое число k такое, что $k \in r^{-1}A$, $k+1 \in r^{-1}B$. Оно нам и нужно. □

Каждому рациональному числу r отвечает два сечения: (A_r, B_r), где $A_r = \{a \in \mathbb{Q} \mid a < r\}$, $B_r = \{b \in \mathbb{Q} \mid b \geqslant r\}$, и (A'_r, B'_r), где $A'_r = \{a \in \mathbb{Q} \mid a \leqslant r\}$, $B'_r = \{b \in \mathbb{Q} \mid b > r\}$. Скажем, что каждое из оставшихся сечений определяет свое *иррациональное* число, т. е. действительное число, не являющееся рациональным.

Более точно, введем на множестве сечений отношение эквивалентности, объявив эквивалентными два сечения, отвечающие одному и тому же рациональному числу r (для каждого $r \in \mathbb{Q}$), и считая, что больше никакие различные сечения друг другу не эквивалентны. Множество *действительных чисел* $\mathbb{R}$ определим, как множество классов эквивалентности сечений. Каждому рациональному числу r, таким образом, соответствует свое действительное число (состоящее из сечений (A_r, B_r) и (A'_r, B'_r)). Их мы будем называть рациональными действительными числами. Остальные действительные числа называются иррациональными. Множество действительных чисел обозначается через $\mathbb{R}$.

Определим на $\mathbb{R}$ арифметические операции. Для произвольных подмножеств $P, Q \subseteq \mathbb{Q}$ мы полагаем $P + Q = \{p + q \mid p \in P, q \in Q\}$, $PQ = \{pq \mid p \in P, q \in Q\}$.

Определение 2. Пусть x, y — действительные числа. Их сумма определяется как действительное число, отвечающее сечению с нижним множеством $A_x + A_y$, где A_x и A_y — нижние множества сечений, отвечающих x и y.

Корректность этого определения (независимость от выбора сечений для рациональных x или y) легко проверяется. Коммутативность и ассоциативность следуют из того, что сложение рациональных чисел коммутативно и ассоциативно. Нулем является класс сечений, отвечающих рациональному числу 0. Проверим, что противоположное число можно определить так: $A_{-x} = -B_x$. Действительно, то, что $A_x - B_x \subseteq A_0$ очевидно. С другой стороны, по утверждению 3 для любого рационального $r < 0$ найдутся элементы $a \in A_x, b \in B_x$ такие, что $a - b = r$. Поэтому $(-x) + x = 0$ в смысле определенной выше операции сложения сечений.

Для каждого действительного числа x положим $C_x = (A_x \setminus A_0) \cup (A_0 \setminus A_x)$. Это множество определено с точностью до того, включается ли туда 0 и, в случае рациональности действительного числа x, соответствующее рациональное число r. Легко видеть, что действительное число x определяется по C_x однозначно, причем в качестве C_x могут встречаться те и только те подмножества $C \subseteq \mathbb{Q}$, для которых выполнены условия:

1) $(\forall q, q' \in C)\ qq' \geqslant 0$;

2) $(\forall q, q' \in \mathbb{Q})\ q \in C \wedge |q'| < |q| \Rightarrow q' \in C$;

3) $(\exists q \in \mathbb{Q})\ q \notin C \wedge -q \notin C$.

Определение 3. Пусть x, y — действительные числа. Их произведение определяется как действительное число z такое, что $C_z = C_x C_y$.

Упражнение 2. Проверьте, что это определение корректно, и убедитесь, что $\mathbb{R}$ — поле.

Определение 4. Пусть x, y — действительные числа. Если $x \neq y$, то мы считаем, что $x < y$, если $A_x \subset A_y$. Как обычно, $x \leqslant y$ означает, что либо $x < y$, либо $x = y$.

Упражнение 3. Проверьте, что это определение корректно, и убедитесь, что $\mathbb{R}$ — упорядоченное поле.

Действительные числа обладают свойством *полноты*: в них уже никаких «щелей» не осталось.

Принцип Дедекинда. *Предположим, что множество действительных чисел разбито на два непустых подмножества L, M так, что каждый элемент L меньше каждого элемента L. Тогда либо в множестве L есть наибольший элемент, либо в множестве M есть наименьший элемент.*

Доказательство. Положим $A = \bigcup_{x \in L} A_x$. Ясно, что $A \subseteq A_y$ для любого $y \in M$. Кроме того, очевидно, что A является нижним множеством некоторого сечения. Обозначим соответствующее действительное число через z. Если $z \in L$, то z — наибольший элемент L. В противном случае z — наименьший элемент M. □

Определение 5. Пусть задано подмножество $M \subseteq \mathbb{R}$. Множество M называется *ограниченным сверху*, если $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in Mx)\ x \leqslant c$, при этом c называется *верхней границей* множества M. Аналогично, множество M называется *ограниченным снизу*, если $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in Mx)\ x \geqslant c$, при этом c называется *нижней границей* множества M. Множество M называется просто *ограниченным*, если оно ограничено и сверху, и снизу.

Ясно, что множество является ограниченным тогда и только тогда, когда $(\exists c \in \mathbb{R})\ (\forall x \in M)\ |x| \leqslant c$.

Определение 6. Число b называется *точной верхней гранью* подмножества $M \subseteq \mathbb{R}$, если оно является верхней границей этого множества, причем никакое меньшее число верхней границей не является. Иначе говоря, точной верхней гранью называется наименьшая верхняя граница. Аналогично, точной нижней гранью называется наименьшая нижняя граница.

Принцип Вейерштрасса. *У любого ограниченного сверху непустого подмножества $M \subseteq \mathbb{R}$ есть точная нижняя грань.*

Доказательство. Положим $A = \bigcup_{x \in M} A_x$. Ясно, что A является нижним множеством некоторого сечения. Обозначим соответствующее действительное число через z. Проверьте сами, что z — точная верхняя грань множества M. □

Следствие 4. *У любого ограниченного снизу непустого подмножества $M \subseteq \mathbb{R}$ есть точная нижняя грань.*

Определение 7. *Полным упорядоченным полем* называется любое упорядоченное поле, в котором выполнен принцип Вейерштрасса.

Легко проверить, что принцип Вейерштрасса влечет принцип Дедекинда (и наоборот). Поэтому в определении полного упорядоченного поля с тем же успехом можно потребовать выполнения принципа Дедекинда.

Мы уже доказали, что действительные числа образуют полное упорядоченное поле. На самом деле, любое полное упорядоченное поле изоморфно полю действительных чисел. Нам, впрочем, этот факт не понадобится.