# Математический анализ — I

## Лекция 16

### Применение асимптотических разложений к вычислению пределов

Рассмотрим два примера.

**Пример 1.** Пусть $k \in \mathbb{N}$. Рассмотрим предел $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, где $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^k}$. Подставляя $-x^2$ вместо $t$ в ряд для $\sqrt{1+t} = (1+t)^{1/2}$, получаем ряд

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \binom{1/2}{1}x^2 + \binom{1/2}{2}x^4 - \dots,$$

с радиусом сходимости 1. Оставляя из этого ряда и из ряда для $\cos x$ несколько первых членов, получаем асимптотическое разложение числителя дроби.

Если взять разложение с точностью до $o(1)$, то получится

$$f(x) = \frac{(1+o(1)) - (1+o(1))}{x^k} = \frac{o(1)}{x^k} = o(x^{-k}).$$

Из этого нельзя сделать никаких выводов о пределе $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Действительно, если в некоторой окрестности нуля $f(x) = h(x)x^{-k}$, где $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = 0$, то $f(x)$ может иметь любой конечный предел, бесконечный предел, или вовсе не иметь предела при $x \to 0$ (приведите примеры!).

Если взять разложение с точностью до $o(x)$, то получится

$$f(x) = \frac{(1+o(x)) - (1+o(x))}{x^k} = \frac{o(x)}{x^k} = o(x^{1-k}).$$

Теперь можно сделать вывод, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ при $k = 1$, а при больших $k$ опять ничего сказать нельзя.

Возьмем разложение с точностью до $o(x^2)$:

$$f(x) = \frac{(1 - x^2/2 + o(x^2)) - (1 - x^2/2 + o(x^2))}{x^k} = \frac{o(x^2)}{x^k} = o(x^{2-k}).$$

Мы заключаем, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ при $k \leqslant 2$. При $k > 2$ из этого разложения нельзя ничего узнать.

Аналогично рассматривается разложение с точностью до $o(x^3)$. Если же мы возьмем разложение с точностью до $o(x^4)$, получим новую ситуацию:

$$f(x) = \frac{(1 - x^2/2 - x^4/8 + o(x^2)) - (1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^2))}{x^k} = \\ = \frac{-x^4/12 + o(x^4)}{x^k} = \frac{-x^{4-k}}{12} + o(x^{4-k}).$$

Теперь видно, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ при $k < 4$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1/12$ при $k = 4$, и $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \infty$ при $k > 4$. Дальнейшие уточнения асимптотического разложения уже не нужны.

**Пример 2.** Найдем предел последовательности $a_n = n(\sqrt[3]{n^3+n} - \sqrt{n^2-1})$ $n \to \infty$. Мы имеем $a_n = n^2(\sqrt[3]{1+1/n^2} - \sqrt{1-1/n^2})$. Поскольку $1/n^2$ — бесконечно малая последовательность ненулевых чисел, мы можем подставлять $1/n^2$ вместо $x$ в асимптотические разложения, имеющие место при $x \to 0$, и получать асимптотические разложения, выполняющиеся при $n \to \infty$. Поэтому

$$a_n = n^2\left(\left(1 + \frac{n^{-2}}{3} + o(n^{-2})\right) - \left(1 - \frac{n^{-2}}{2} + o(n^{-2})\right)\right) == n^2\left(\frac{5n^{-2}}{6} + o(n^{-2})\right) = \frac{5}{6} + 0(1).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{5}{6}$.

*Замечание.* В примере 2 мы подставляли $n^{-2}$ вместо $x$ в асимптотические разложения при $x \to 0$. Более общим образом, пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — базы в множествах $X$ и $Y$ соответственно, и пусть $g\colon X \to Y$ — отображение, непрерывное относительно $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$. Очевидно, что если $f$ и $h$ — две вещественные функции на $Y$, и $h(y) = o(f(y))$ при базе $\mathcal{B}$, то $h(g(x)) = o(f(g(x)))$ при базе $\mathcal{A}$.

Далее, пусть $f(y) = a_0 f_0(y) + a_1 f_1(y) + \cdots + a_n f_n(y) + o(f_n(y))$ — асимптотическое разложение функции $f\colon Y \to \mathbb{R}$ при базе $\mathcal{B}$. Тогда $f(g(x)) = a_0 f_0(g(x)) + a_1 f_1(g(x)) + \cdots + a_n f_n(g(x)) + o(f_n(g(x)))$ — асимптотическое разложение функции $f \circ g\colon X \to \mathbb{R}$ при базе $\mathcal{A}$.

## Свойства непрерывных функций

Классификацию точек разрыва и теорему о том, что функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем минимума и максимума, прочитайте в учебнике Зорича (глава IV).

Для доказательства основной теоремы алгебры (задача 3 из листка 9) вам понадобится аналогичный факт о непрерывных функциях комплексного переменного. В полной общности (для непрерывных функций на компакте) мы докажем нужный факт несколько позже. Пока же можно ограничиться следующим утверждением, которое можно доказать имеющимися у нас на вооружении кустарными методами.

**Предложение 1.** *Пусть $R \in \mathbb{R}$ — положительное число, $K_R = \{z = x + yi \in \mathbb{C} \mid |x| < R \wedge |y| < R\}$, и $f\colon K_R \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Тогда $f$ ограничена на $K_R$ и достигает на нем минимума и максимума.*

*Указание.* Докажите сначала, что из любого покрытия $K_R$ открытыми квадратами можно выбрать конечное подпокрытие. Затем проведите рассуждение, аналогичное доказательству для случая функции на отрезке.