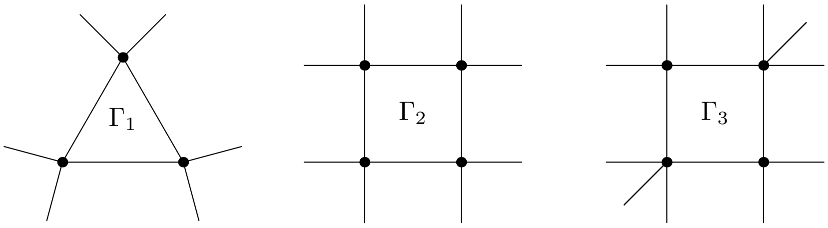
Группы автоморфизмов, инварианты и орбиты.

A7◇1. Найдите группы автоморфизмов графов Γ_1, Γ_2 и Γ_3:



а) Найдите в $\mathrm{Aut}\,(\Gamma_1)$ нормальную подгруппу порядка 8 и опишите фактор группу по ней.
б) Постройте нетривиальный гомоморфизм $\mathrm{Aut}\,(\Gamma_2) \longrightarrow S_4$ и найдите его ядро и образ.
в) Изоморфны ли $\mathrm{Aut}\,(\Gamma_2)$ и $\mathrm{Aut}\,(\Gamma_3)$?

A7◇2. Найдите группы автоморфизмов групп **а)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ **б)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ **в)** $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ **г)** S_3 **д)** D_4 **е)** D_5 **ж*)** $S_3 \times \mathbb{Z}_3$

A7◇3 (внутренние автоморфизмы). Покажите, что отображение $\mathrm{Ad}\, : G \longrightarrow \mathrm{Aut}\,(G)$, переводящее $g \in G$ в *автоморфизм сопряжения* $\mathrm{Ad}_g \, : G \xrightarrow{h \mapsto ghg^1} G$ является корректно определённым гомоморфизмом групп, а его образ[1] — нормальная подгруппа в $\mathrm{Aut}\,(G)$.

A7◇4*. Постройте автоморфизм симметрической группы S_6, не являющийся внутренним.

A7◇5. Найдите группы автоморфизмов полей **а)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ **б)** $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ **в)** $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ **г)** $\mathbb{Q}(1+i)$ **д*)** $\mathbb{F}_8$ **е*)** $\mathbb{F}_{16}$ **ж*)** $\mathbb{F}_{27}$

A7◇6. Пусть группа $G = \mathbb{Z}_3$ действует на кольце многочленов $R = \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ циклическими перестановками переменных. Покажите, что многочлены, инвариантные относительно этого действия, образуют в R подкольцо, порождённое (как кольцо) элементарными симметрическими многочленами и многочленом $\Delta = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_1)$.

A7◇7*. Пусть группа чётных перестановок A_n действует перестановками переменных на кольце многочленов $\mathbb{Q}[x_1, x_2, \dots, x_n]$. Опишите кольцо инвариантов этого действия.

A7◇8. Симметрическая группа S_n действует перестановками на множестве $X = \{1, 2, \dots, n\}$. Опишите орбиты индуцированного покомпонентного действия S_n на **а)** $X \times X$ **б)** $X \times X \times X$ (когда $n \geqslant 3$) **в)** $X \times X \times X \times X$ (когда $n \geqslant 4$) **г)** X^m (когда $n \geqslant m$)

A7◇9. Собственная группа куба G действует на множестве V его вершин и на множестве E его рёбер. Опишите орбиты покомпонентного действия G на **а)** $V \times V$ **б)** $V \times E$ **в)** $E \times E \times E$

A7◇10. Перечислите классы сопряжённых элементов с указанием числа элементов в каждом классе для всех знакопеременных групп A_n с $n \leqslant 6$.

A7◇11. Две нормальные подгруппы $H_1, H_2 \lhd G$ пересекаются по единице. Следует ли из этого, что $h_1 h_2 = h_2 h_1 \ \forall \ h_i \in H_i$?

A7◇12 (полупрямые произведения). Пусть дан гомоморфизм $\sigma : H \xrightarrow{h \mapsto \sigma_h} \mathrm{Aut}\,(N)$ группы H в группу автоморфизмов группы N. Покажите, что пары (g, h) с $g \in N$, $h \in H$ образуют группу[2] относительно операции $(g_1, h_1) \cdot (g_2, h_2) = g_1\, h_1 g_2 h_1^{-1}\, h_1 h_2 \overset{\mathrm{def}}{=} \Big(g_1 \sigma_h(g_2)\, ,\, h_1 h_2 \Big)$, причём N будет нормальной подгруппой этой группы, и соответствующая фактор группа будет изоморфна H.

A7◇13. Покажите, что равенство $G = N \leftthreetimes H$ равносильно наличию в G подгрупп $N, H \subset G$, таких что N нормальна, $N \cap H = e$ и $N \cdot H = G$.

A7◇14. Опишите все неизоморфные полупрямые произведения $\mathbb{Z}/(2) \leftthreetimes \mathbb{Z}/(4)$ и $\mathbb{Z}/(4) \leftthreetimes \mathbb{Z}/(2)$.

---

[1] он называется *группой внутренних автоморфизмов*

[2] она обозначается $N \leftthreetimes H$ и называется *полупрямым произведением*