$$H(t) = \exp \sum \frac{p_r}{r} t^r = \prod \exp \frac{p_r}{r} t^r = \prod_{r \geq 1} \sum_{n_r \geq 0} \frac{p_r^{n_r}}{n_r! \, r^{n_r}} t^{r n_r}$$

коэф. при t^e

Лекция 08.06.

$\Lambda_{\mathbb{Q}} \xleftarrow[\sim]{ch} L_{\mathbb{Q}}$ – центр. ф-и на S_n, $n \in \mathbb{N}$

$\Lambda_{\mathbb{Q}} \supset \Lambda \xleftarrow[\sim]{ch} L_{\mathbb{Z}} \subset L_{\mathbb{Q}}$ – целочисл. лин. комбинац. χ

решётки $\qquad L_{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}\langle \psi_\lambda \rangle$

$S_\lambda \in \Lambda$ ф-и Шура $\longleftarrow \chi_\lambda \in L$ $\qquad \langle S_\lambda, k_\mu p_\mu \rangle = \langle \chi_\lambda, \delta_\mu \rangle$

h_λ полн ф-и $\longleftarrow \psi_\lambda = \chi(T_\lambda) = 1\!\!1_{\lambda_1} * 1\!\!1_{\lambda_2} * \dots$

$= h_{\lambda_1} * h_{\lambda_2} * \dots$ достаточно проверить $h_i \leftarrow 1\!\!1_i$

$h_n \leftarrow 1\!\!1_n = \sum_D \delta_{CD}$

χ_λ выражаются через ψ_λ верхнетреуг. матрицей с 1 на диаг.

$T_\lambda = U_\lambda + \dots$

$U_\lambda = T_\lambda + \dots$

$\mathbb{Z}\langle U_\lambda \rangle = \mathbb{Z}\langle T_\lambda \rangle$

Итак, $ch(L_{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}\langle h_\lambda \rangle = \mathbb{Z}\langle e_\lambda \rangle = \Lambda_{\mathbb{Z}}$

$\omega: h_\lambda \to e_\lambda$

$$< \sum b_\lambda \chi_\lambda, \sum c_\lambda \chi_\lambda > = \sum b_\lambda c_\lambda$$

$$<x, x> = 1 \Rightarrow x = \pm \chi_\lambda$$

Короче, осталось в кольце симметрических ф-й ($\Lambda_{\mathbb{Z}}$) найти ортонормальный базис.

Опр ф-й Шура:

Переменных ровно n.

$\rho = (n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0)$

Определитель Вандермонда : $\det \left[a_\rho = ((\rho)_{ij}) = x_i^{\rho_j} \right] = \prod\limits_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$

$n=2$ $\qquad \begin{pmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \end{pmatrix} = x_1 - x_2$

$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$

Возьмем набор:

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ - набор чисел ≥ 0 [если $\alpha_i = \alpha_j$, то $\det A_\alpha = 0$]

$A_\alpha = (A_\alpha)_{ij} = x_i^{\alpha_j} \qquad a_\alpha = \det A_\alpha$

$\Downarrow$

Рассм. α - различные и строго убыв.

$\alpha = \lambda + \rho$, где λ - разбиение

a_α - кососимм ф-я x (при перестановки строк - знак меняется)

$\boxed{\text{Опр. } S_\lambda := \dfrac{a_{\lambda+\rho}}{a_\rho}}$ - симм. ф-и от $x_1, \dots, x_n$

$\alpha = \lambda + \rho$

Предложение: $S_\lambda = \det(H_{\lambda+\rho}) = \underline{\sum\limits_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma h_{\lambda+\rho-\sigma(\rho)}}$ $*$

$\underbrace{H_{\lambda+\rho}}_{\alpha} = H_\alpha$

$(H_\alpha)_{ij} := h_{\alpha_j - n + i} = h_{\lambda_j - j + i}$

$\alpha_j = \lambda_j + \rho \quad \rho = (n-1, \dots, 2, 1, 0) \to$ диаг элем т.к $\rho = \sigma(\rho)$

Следствие $*$: 1) $S_\lambda = h_\lambda + \sum\limits_{\mu > \lambda} c_{\mu\lambda} h_\mu$

$\Rightarrow \mathbb{Z}<S_\lambda> = \mathbb{Z}<h_\lambda> = \Lambda_{\mathbb{Z}} \qquad h_{<0} = 0$

Следствие $*$:

2) если число перем. увеличишь на 1, и λ дополнишь $\lambda_{n+1} = 0$, то матрица $h_{\lambda+\rho}$ получит нижнюю строку $\left(0 \dots 0 1\right)$ и правый столбец [illegible] $\det = \det$

0 0 0 0 0 1

т.е. выражение s через h имеет смысл при любом числе переменных $s_\lambda \in \Lambda$.

$$S_\lambda = \det (H_{\lambda+\rho}) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma h_{\lambda+\rho-\sigma(\rho)}$$

Д-во: $e_r^{(k)}$:= элем. $k = 1, \dots, n$
симм. ф-и от $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$

Производящая ф-я:

$$E^{(k)}(t) := \sum_{r=1}^{n-1} e_r^{(k)} t^r = \prod_{i\neq k} (1+x_i t)$$

$$H_n(t) := \prod_{i=1}^{n} (1-x_i t)^{-1}$$

$$= \sum h_i(x) t^i$$

$$H_n(t) E^k(-t) = (1-x_k t)^{-1}$$

приравняем коэфф. при t^{α_j}

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{n-i} h_{\alpha_j - n + i} e_{n-i}^{(k)} = X_k^{\alpha_j}$$

Матрица $E_{ki} := (-1)^{n-i} e_{n-i}^{(k)}$

$$(H_\alpha)_{ij} := h_{\alpha_j - n + i}$$

$$EH_\alpha = A_\alpha \Rightarrow \det E \det H_\alpha = \det A_\alpha = a_\alpha$$

$$S_\lambda = \frac{\det E \det H_\alpha}{\det E \det H_\rho}$$

$$\det H_\rho = 1 \qquad H_\rho = \begin{pmatrix} 1 & & ? \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

Осталось д-ть: $\langle S_\lambda, S_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$

т.е. S_λ образуют ортонормальный базис $\Lambda_\mathbb{Z}$

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = k_\lambda \delta_{\lambda\mu}$$

C - матрица перехода от $\{S_\lambda\}$ к $\{p_\mu\}$

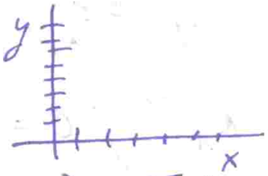
$$C \, Id \, C^T = \mathrm{diag}(k_\lambda)$$

Предложение:

$$\sum_\lambda s_\lambda(x)\, s_\lambda(y) = \sum_\lambda k_\lambda^{-1}\, p_\lambda(x)\, p_\lambda(y) = \mathcal{K}(x,y) := \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}$$

Д-во: $z_k := x_i y_j$

как-то занумеруем все z_k



$$K(x,y) = H_z\Big|_{t=1} = \sum_e h_e(z) = \sum_\lambda k_\lambda^{-1} p_\lambda(z) =$$

$$= \sum_\mu k_\mu^{-1} p_\mu(x)\, p_\mu(y)$$

т.к. $p_\lambda(z) = p_\lambda(x)\, p_\lambda(y)$

$\Downarrow$

проверили, что $\sum_\lambda k_\lambda^{-1} p_\lambda(x)\, p_\lambda(y) =$

$$= \prod_{i,j}(1-x_iy_j)^{-1}$$

Теперь опять n переменных $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$

$$\mathcal{K}_n(x,y) := \prod_{1\le i,j\le n}(1-x_iy_j)^{-1} = \sum_{\substack{\text{по наборам}\\ \text{натур. чисел}\\ \alpha\in N^n}} h_\alpha(x)\, y^\alpha \qquad N = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{\sigma\in S_n} (-1)^\sigma y^{\sigma(\rho)}$$

Умножим на Вандермонд от y

$$a_\rho(y)\, \mathcal{K}_n(x,y) = \sum_{\alpha,\sigma} (-1)^\sigma h_\alpha(x)\, y^{\alpha+\sigma(\rho)} =$$

$$= \sum_{\beta,\sigma} (-1)^\sigma h_{\beta-\sigma(\rho)}\, y^\beta$$

если $\underline{a_\rho(x)\cdot \sum (-1)^\sigma h_{\beta-\sigma(\rho)}(x) = a_\beta(x)} \Rightarrow$

$$a_\rho(x)\, a_\rho(y)\cdot \mathcal{K}_n(x,y) = \sum_{\beta\in N^n} a_\beta(x)\, y^\beta = \sum_{\substack{\lambda\text{-разбиения}\\ \text{длины } n}} a_{\lambda+\rho}(x) \sum (-1)^\sigma \cdot y^{\sigma(\lambda+\rho)} =$$

β состоят из разл. положит. чисел

$$= \sum_\lambda a_{\lambda+\rho}(x)\, a_{\lambda+\rho}(y)$$

$$\mathcal{K}_n(x,y) = \frac{\sum_\lambda a_{\lambda+\rho}(x)\, a_{\lambda+\rho}(y)}{a_\rho(x)\, a_\rho(y)} = \sum_\lambda s_\lambda(x)\, s_\lambda(y)$$

$$\mathcal{K}(x,y) = \sum s_\lambda(x)\, s_\lambda(y) = \sum k_\lambda^{-1} c_{\lambda\nu} c_{\lambda\mu}\, s_\nu(x)\, s_\mu(y)$$

т.к. $s_\nu(x)\, s_\mu(y)$ образуют базис в ф-ях от x, y,

коэфф. равны, т.е. $D := (d_{\nu\mu}) := C^T(\operatorname{diag} k_\lambda^{-1})\, C$

$d_{\nu\mu}$

$\parallel$

$\sum_\lambda k_\lambda^{-1} c_{\lambda\mu} c_{\lambda\nu} = \delta_{\nu\mu}$

$C^T(\operatorname{diag} k_\lambda^{-1}) C = Id$

$\Downarrow$

$\operatorname{diag} k_\lambda = CC^T$

Мы доказали, что $\{\pm S_\lambda\} = \{ch\ (\pm X_\mu)\}$

Последний шаг д-ва $ch\ (X_\lambda) = S_\lambda$

$$\underset{U_\lambda}{\langle X_\lambda}, \underset{T_\mu}{\Psi_\mu \rangle} = \begin{cases} 1, \text{ при } \lambda = \mu \\ 0, \text{ при } \lambda < \mu \end{cases}$$

$ch\ (\Psi_\mu) = h_\mu$

$h_\mu = S_\mu + \sum_{\lambda > \mu} b_{\lambda\mu} S_\lambda$

$$\langle S_\lambda, h_\mu \rangle = \begin{cases} 1, \text{ при } \lambda = \mu \\ 0, \text{ при } \lambda < \mu \end{cases}$$