01.06.10.

Симметрические функции.

$L_R = \bigoplus_{n\geq 0} L^n_R$ $\qquad L^n =$ центральные ф-и на $\mathfrak{S}_n$

$(\mathbb{Q})\ L^2 \cdot L^3 (\mathbb{Q}) \subset L^5$ $\qquad \overset{\parallel}{K}\, Rep(\mathfrak{S}_n)$

$[triv] - \sqrt{2} \left(\tfrac{1}{5}\right) [sign]$ $\qquad S_3$

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Цель: $L_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\geq 0} L^n_{\mathbb{Z}}$

$\boxed{15.7}$

Центральные функции (целочисленные) - целочисленные линейные комбинации неприводимых характеров $(= Rep(\mathfrak{S}_n))$

$$\Lambda_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda^n_{\mathbb{Z}}$$

базис (над $\mathbb{Z}$) образуют элементарные симметрические

произвольное разбиение — $e_\lambda = e_{\lambda_1} \cdot e_{\lambda_2} \cdot \ldots \ldots$ $\quad \lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots)$

или же мономиальные ф-и $\quad m_\lambda = \sum x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots$

Например,
$e_{2,1} = e_2 \cdot e_1 = \left(\sum x_i x_j\right) \sum x_k$

Мы стремимся д-ть р-во: $\Lambda_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\geq 0} \Lambda_{\mathbb{Z}}^n = L_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{n\geq 0} L^n_{\mathbb{Z}}$

$\Lambda_{\mathbb{Z}} \subset \Lambda_{\mathbb{Q}}$, $\quad L_{\mathbb{Z}} \subset L_{\mathbb{Q}}$

Глупейший базис в $L_{\mathbb{Q}}$ - это δ-ф-и классов сопряжённости.

$\delta_\nu = 1$ на классе сопр-ти C_ν $\qquad \nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots)$ длина цикла

$\nu = (\nu_1 \geq \nu_2 \geq \ldots) = 1^{n_1} 2^{n_2} 3^{n_3} \ldots$ (n_1 строк длины 1, n_2 строк длины 2)

$\delta_\nu = 0$ на C_μ, $\mu \neq \nu$

Вычислим скалярное произведение $(\underset{f}{\delta_\mu}, \overset{g}{\delta_\nu}) := \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f(\sigma)\overline{g(\sigma)} =$

$= \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} f(\sigma)\, g(\sigma^{-1}) = 0$ (если $\nu \neq \mu$)

$= \dfrac{1}{n_1!\, n_2!\, 2^{n_2} n_3!\, 3^{n_3} \ldots}$ или $= \dfrac{\overset{\text{число классов сопр}}{\# C_\nu}}{n!} = \dfrac{1}{k_\nu}$, $k_\nu = \# Z_\nu =$ порядок стабилиз.

Хар Фробениуса: $ch(\sigma_\nu) := \frac{1}{k_\nu} p_\nu$

p_ν – степенная симметрическая ф-я

$p_i = \sum x_k^i$

$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \ldots$ $\quad \left[\Lambda_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{n \geq 0} \Lambda^n_{\mathbb{Q}} \xleftrightarrow{ch} L_{\mathbb{Q}} = \bigoplus_{n\geq 0} L^n_{\mathbb{Q}} \right]$

Хотим, чтобы ch был изоморфизмом алгебр

$$ch(x \cdot y) = ch(x)\, ch(y)$$

и изометрией $(ch\, x, ch\, y) = (x, y)$

$$\left(\frac{1}{k_\nu} p_\nu, \frac{1}{k_\mu} p_\mu\right) := \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu \\ \frac{1}{k_\nu}, & \nu = \mu \end{cases} \qquad (p_\nu, p_\mu) = \begin{cases} 0, & \nu \neq \mu \\ k_\nu, & \nu = \mu \end{cases}$$

порядок стабилизатора

Предложение: ch – это изоморфизм алгебр $L_{\mathbb{Q}} \xrightarrow{\sim} \Lambda_{\mathbb{Q}}$

Д-во: технический трюк $L = \bigoplus \mathbb{Q}[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n} \subset \bigoplus \Lambda_{\mathbb{Q}}[\mathfrak{S}_n]^{\mathfrak{S}_n} \ni P := P(C_\nu) := p_\nu$

Лемма: $ch(f) = \langle P, f \rangle := \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} P(\sigma) f(\sigma^{-1})$

$$ch(\sigma_\nu) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in C_\nu} p_\nu = \frac{\# C_\nu}{n!} p_\nu = \frac{1}{k_\nu} p_\nu \quad \blacksquare$$

Убедимся что $ch(f * g) = ch\left(\mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} f \boxtimes g\right) = \langle P_{n+m}, \mathrm{Ind}\, f \boxtimes g \rangle =$

$\mathbb{Q}(\mathfrak{S}_n) \quad \hat{\mathbb{Q}}[\mathfrak{S}_m]$ внешнее умножение

Взаимность Фробениуса $\langle P_{n+m} |_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}, f \boxtimes g \rangle = \langle P_n \boxtimes P_m, f \boxtimes g \rangle =$

$= \langle P_n, f \rangle \langle P_m, g \rangle = ch(f)\, ch(g)$

① Элементарные $e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2}, \ldots,$ e_i организуются в производящую ф-ю $E(t) := \sum_{i \geq 0}^{\infty} e_i t^i = \prod_{k \geq 1} (1 + x_k t)$

$\Lambda[[t]]$

② Полные $h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} h_{\lambda_3}, \ldots,$ где h_i организуются в производящую ф-ю $H(t) := \sum_{i \geq 0}^{\infty} h_i t^i = \prod_{k \geq 1} \frac{1}{(1 - x_k t)} =$

$$= \prod_{k \geq 1} (1 + x_k t + x_k^2 t^2 + \ldots)$$

$H(t)\cdot E(-t)=1 \;:\; \forall n>0 \quad \sum_{i\geq 0}^{n} e_i h_{n-i} (-1)^i = 0$ (отсюда все e_i можно выразить через h_i)

Важное нововведение: инволюция $\omega : \Lambda \circlearrowleft$

$$\omega(e_r) := h_r$$

$$\Lambda = \mathbb{Q}[e_i] \qquad \Lambda \to \Lambda$$

$$\omega^2 \overset{?}{=} 1$$

Д-во: применим ω к $\sum_{i\geq 0}^{n} e_i h_{n-i}(-1)^i = 0$

$$\sum_{i\geq 0}^{n} h_i\, \omega(h_{n-i}) (-1)^i = 0$$

можно записать:

$$\sum_{i\geq 0}^{n} h_{n-i}\, \omega(h_i) (-1)^i = 0$$

③ Степенные ф-и $p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} \dots$, p_i организуются в производящую ф-ю

$$P(t) = \sum_{r\geq 1} p_r t^{r-1} :=$$

$$= \sum_{i\geq 1} x_i \sum_{k\geq 0} x_i^k t^k = \sum \frac{x_i}{1-x_i t} =$$

$$= \frac{d}{dt} \log H(t) = \frac{H'}{H}$$

$$\frac{E'(t)}{E(t)} = \frac{H'(-t)}{H(-t)} = P(-t)$$

Следствие: $\omega(p_r) = (-1)^{r-1} p_r$

Предл: $h_\ell = \sum_{|\lambda|=\ell} \kappa_\lambda^{-1} p_\lambda$

$$\mathbb{1}_{\sigma_\ell} \overset{?}{=} \sum \delta_{C_\lambda}$$

Д-во:

Рассм $F(t) := \exp \sum_{r\geq 1} \frac{p_r}{r} t^r$

$$\frac{F'(t)}{F(t)} = P(t) = \frac{H'(t)}{H(t)}, \quad F(0)=1,\ H(0)=1 \implies F(t) = H(t)$$

$$H(t) = \exp \sum \frac{p_r}{r} t^r = \prod \exp \frac{p_r}{r} t^r = \prod_{r \geq 1} \sum_{n_r \geq 0} \frac{p_r^{n_r}}{n_r! \, r^{n_r}} t^{r n_r}$$

коэф. при t^{ℓ}