Алгебра Лекция.

Конструкция Шпехта.

$U_\alpha = \mathbb{C}[S_n]e_T$ Цель - предъявить явный базис, занумерованный стандартными таблицами формы α.

$\hat{T}_\alpha = \mathrm{Ind}_{S_\alpha}^{S_n}\mathbb{C}$

$\mathbb{C}$ [мн-во разбиений $[1,\dots,n] = A_{\alpha_1}\sqcup\dots\sqcup A_{\alpha_n}$] — таблицы с точностью до перестановки чисел в строках =: таблоиды.

$\hat{T}_n = \mathbb{C} = U_n$	$\hat{T}_{1,\dots,1} = \mathrm{Reg}$, $U_{1,\dots,1} = \mathrm{sign}$
$\hat{T}'_{n} = \mathrm{sign}$	$\hat{T}'_n = \mathrm{Reg}$

представители классов — таблицы с возрастающими слева направо числами.

Опред. Вектор Шпехта $v_T = c_T \hat{T}$
кососимм. по столбцам

Модуль $Ш_\alpha = S_n$ - подмодуль $\hat{T}_\alpha$, порожд. всеми векторами Шпехта v_T, T - таблоид формы α.

$T'_\alpha \twoheadrightarrow Ш_\alpha \subset \hat{T}_\alpha \Rightarrow Ш_\alpha = U_\alpha \Rightarrow \dim Ш_\alpha = \#$ станд. таблиц

$\mathbb{C}[S_n]c_T$

$x c_T \mapsto x c_T \hat{T} = x v_T$

Лемма: $\{v_T\}_T$ - станд. линейно независ. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ образ. базис в $V_\alpha = W_\alpha$.

Д-во: введем порядок на таблицах (на всех таблицах) лексикографический, при чтении справа налево снизу вверх. В этом порядке если T - станд., то все слагаемые $v_T = c_T T$, кроме T, строго меньше T $\Rightarrow$ матрица перехода от $\{T\}$ к $\{v_T\}$ верхнетреуг. с единицами на диагонали.

Т.к. $\{T\}$ лин. незав. в T_α, то и $\{v_T\}$ тоже т.к. $\dim V_\alpha = \#\{T\} \Rightarrow \{v_T\}$ базис

$$\begin{pmatrix} 1 & \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 1 & \vdots & & ? & \\ 0 & 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & \\ 0 & 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Следствие: $V_\alpha|_{S_n} = \oplus V_{\alpha'}$ по всем диагр., полученным из α выкидыванием 1 клеточки

$$\boxed{\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} V_{\alpha'} = \oplus V_\alpha}$$

Д-во: $\sum \dim U_{\alpha'} = \dim U_\alpha = \#\{$станд. табл. формы $\alpha\}$

$\sum \#$ станд. табл. форм α' ← выкидывание $\boxed{n}$

достаточно док-ть, что $U_{\alpha'}$ входит в $U_\alpha|_{S_{n-1}}$

Надо построить сюръективный гомоморфизм $Ш_\alpha|_{S_{n-1}} \to Ш_{\alpha'}$

$S_{n-1} \subset S_n$

стабилизатор числа n

$$V_T \longrightarrow V_{T \setminus \boxed{n}}$$

Характеры неприв. предст. S_n

$\chi(T_\alpha) =: \psi_\alpha$, $\chi(U_\alpha) =: \chi_\alpha$

теоретически хар-р ψ_α посчит. можно

Вопрос - как выразить χ_α через ψ_β

Ф-ла Фробениуса

L_n = вещ. пр-во всех центральных ф-ий на S_n $(f(g) = f(hgh^{-1}))$

$\{\chi_\alpha\}$ и $\{\psi_\alpha\}$ образуют базисы в L_n

$\{\delta_C\}$ - тоже базис

C - класс сопр-ти

$$\delta_C(g) = \begin{cases} 1, & g \in C \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Вычисление $X_\alpha \equiv$ матр. перехода от базиса $\{\delta_c\}$ к базису $\{X_\alpha\}$.

L_n - $\mathbb{C}$ - вект. пр-во $\simeq \mathbb{C}^{p(n)}$ - число разбиений $\ni v$

$$\overset{\psi}{X_\alpha} = X(U_\alpha) = [U_\alpha]$$ - класс представления U_α

$$v = \sum_\alpha a_\alpha [U_\alpha]$$

$$L_n = K(\mathrm{Rep}\, \mathfrak{S}_n) = K_n$$

представления

$$V \oplus W = U$$
$$[V] + [W] = [U]$$

$$\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

$\bigoplus_n L_n$ - алгебра (можно цент. ф-ии умножать)

$$L_n \cdot L_m \to L_{n+m}$$

$$\varphi_1 * \varphi_2 = \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_m}^{\mathfrak{S}_{n+m}} \varphi_1 \boxtimes \varphi_2$$

$$\varphi_1 \boxtimes \varphi_2 (g_1, g_2) = \varphi_1(g_1) \cdot \varphi_2(g_2)$$

Свойства умножения (*)

1. однородно
2. коммутативно $\varphi_1 * \varphi_2 = \varphi_2 * \varphi_1$

$n = 1 \quad m = 2$

$\{(2,3), e\} \in \mathfrak{S}_3$

$\{(1,2), e\} \subset \mathfrak{S}_3$

Т.к. $S_n \times S_m$ сопряжено $S_m \times S_n$ внутри S_{n+m}.

3. ассоциативно:

$$\varphi_1 * (\varphi_2 * \varphi_3) = (\varphi_1 * \varphi_2) * \varphi_3$$

$$\mathrm{Ind}_{S_m \times S_{n+k}}^{S_{m+n+k}} \left[\varphi_1 \boxtimes \mathrm{Ind}_{S_n \otimes S_k}^{S_{n+k}} \varphi_2 \otimes \varphi_3 \right]$$

$$\mathrm{Ind}_{S_m \times S_n \times S_k}^{S_{m+n+k}} \varphi_1 \boxtimes \varphi_2 \boxtimes \varphi_3$$

$H \subset G \subset K$

V

$$\mathrm{Ind}_H^K V = \mathrm{Ind}_G^K \mathrm{Ind}_H^G V$$

$L = \bigoplus_n L_n$ — градуир. асс. алгебра

$$\dim L_n = p(n)$$

$\Lambda =$ алгебра симметрических ~~многочле~~ функций ~~нов~~ от многих переменных.

Элементарные: $e_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \dots$

$\deg x_i = 1$ $\quad e_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + \dots$

$e_3 = x_1 x_2 x_3 + \dots$

$\Lambda = \mathbb{C}[e_1, e_2, \dots]$, $\deg e_i = i$

Степенные

Полные

Мономиальные

Шура

$p_i = x_1^i + x_2^i + x_3^i + \ldots$

Для произв. разбиения λ $(\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots)$

$p_\lambda := p_{\lambda_1} \cdot p_{\lambda_2} \cdot p_{\lambda_3} \cdot \ldots$

они образуют $\mathbb{C}$ базис Λ

Теорема: $L \simeq \Lambda$

$\psi, \chi, \delta \quad e, p, m, h, s$

Ф-ла Фробениуса:

$\psi_\alpha = \mathrm{Ind}_{S_{\alpha_1} \times \ldots \times S_{\alpha_k}}^{S_n} \mathbb{1} = \mathbb{1}_{\alpha_1} \times \ldots \times \mathbb{1}_{\alpha_k}$

$$\chi_\lambda = \det \begin{bmatrix} \mathbb{1}_{\lambda_1} & \mathbb{1}_{\lambda_2-1} & \mathbb{1}_{\lambda_3-2} \\ \mathbb{1}_{\lambda_1+1} & \mathbb{1}_{\lambda_2} & \mathbb{1}_{\lambda_3-1} \\ \mathbb{1}_{\lambda_1+2} & \mathbb{1}_{\lambda_2+1} & \mathbb{1}_{\lambda_3} \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$\rho = (n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$

$\chi_\lambda = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \psi_{\lambda + \rho - \sigma(\rho)}$

Пример: S_4, $\lambda = (3, 1, 1)$

$$\chi_\lambda = \det \begin{vmatrix} \mathbb{1}_3 & \mathbb{1}_0 & 0 & 0 \\ \mathbb{1}_4 & \mathbb{1}_1 & \mathbb{1}_0 & 0 \\ \mathbb{1}_5 & \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_1 & 0 \\ \mathbb{1}_6 & \mathbb{1}_3 & \mathbb{1}_2 & \mathbb{1}_0 \end{vmatrix} = \psi_{311} - \psi_{32} - \psi_{41} + \psi_5$$