Лекция 20.04.10

Задача № 3. Пусть $L = \mathbb{F}_p^n$ – n-мерное вект. пространство над полем $\mathbb{F}_p$, $p \neq 2$, L^* – двойственное вект. пр-во со спариванием $\langle \cdot , \cdot \rangle : L \times L^* \to \mathbb{F}_p$.

Группа Гейзенберга H_p^n

$$px - xp = Id$$

$$[p, x] = 1$$

$$p, x ; V ? \qquad Tr\, px = Tr\, xp \Rightarrow Tr(px - xp) = 0.$$

этого не м.б. в векторном пр-ве.

если взять 2 оператора

$$p = \frac{\partial}{\partial x}, \quad x$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(xf) - x\frac{\partial f}{\partial x} = f$$

$$f = x^2 + 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^3 + x) = 3x^2 + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(xf) - x\frac{\partial f}{\partial x} = f$$

Классы сопряженности в H_p^n.

$L = \mathbb{F}_p^n$ пара $\overset{=M}{L \oplus L^*}$, (u, u^*), билинейная форма кососимметричная со значениями в $\mathbb{F}_p$.

$$\langle (u_1, u_1^*) \langle u_2, u_2^*) \rangle = u_2^*(u_1) - u_1^*(u_2)$$

Группа Гейзенберга:

$\mathbb{F}_p \times M$ $\qquad$ $[m_1, m_2] = m_1 m_2 - m_2 m_1 = \langle m_1, m_2 \rangle \in \mathbb{F}_p$ хотим

$\qquad m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1}$

умножение в группе Гейзенберга

элементы здесь: $(x, m) = (x, u, u^*)$

если взять $(0, m_1)\cdot(0, m_2)\cdot(0, m_1)^{-1}(0, m_2)^{-1} =$

$$= (\langle m_1, m_2 \rangle, 0)$$

Классы сопряжённости: $e = (0, \overset{\in U}{0}, \overset{\in U^*}{0})$

по опр. умножения $(0, 0, 0)(x, u, u^*) = (0, u, u^*)$

$(1, 0, 0)$ – центральный элемент

$(2, 0, 0)$

$(p-1, 0, 0)$

Вся подгруппа $\mathbb{F}_p$ – центральная она со всем классом сопряжённости: коммутирует.

$e=(0,0,0)$ в $\#(H_p^n)=p^{2n+1}$

центр
$(1,0,0)$
$\vdots$
$(p-1,0,0)$

Есть другие.
Возьмём
$(0, m)$

$(0,m')(0,m)(0,m')^{-1}$

$=(\langle m', m\rangle, m)$

$(?, m)$ образует класс сопряжённости, если $m\neq 0$.

если векторная сост. $=0$
$(\cdot, \underbrace{0,0})$

если вект. сост. $\neq 0$

$$W_a = \mathrm{Ind}_{\mathbb{F}_p\times L}^{H_p^n} \psi_a \qquad \psi_a : \underbrace{\mathbb{F}_p}^{\text{циклич. группа}} \times L \to \mathbb{C}^*$$

ф-ла для индуц. характера: $\psi_a(x,u) = e^{\frac{2\pi i a x}{p}}$

$$\chi_a^{(x,u,u^*)} = \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{\substack{(x_1,u_1,u_1^*)=s \\ s^{-1}gs\in\mathbb{F}_p\times L}} \psi_a(s^{-1}gs)$$

$\mathbb{F}_p$-циклич. группа

$$\overset{s^{-1}}{\overset{\shortparallel}{(x_1,u_1,u_1^*)}} \underset{\underset{g}{\shortparallel}}{(x,u,u^*)} \overset{s}{\overset{\shortparallel}{(x_1,u_1,u_1^*)}} =$$

$$= (x+\langle (u_1,u_1^*)(u,u^*)\rangle, u, u^*) =$$

$$= \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{(x_1,u_1,u_1^*)} \psi_a \langle (u_1,u_1^*)(u,u^*)\rangle =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } u^*\neq 0 \\ \dfrac{1}{p^{n+1}} \displaystyle\sum_{x,u_1,u_1^*} \psi_a \langle (u_1,u_1^*),(u,\overset{u^*}{\overset{\shortparallel}{0}})\rangle \psi_a x, & \text{если } u^*=0 \end{cases} =$$

$$\ominus \begin{cases} \frac{1}{p^{n+1}} \sum\limits_{x, u_1, u_1^*} \psi_a(-u_1^*(u))\, \psi_a(x) \text{ если } u^* = 0 \\ 0, \text{ если } u^* \neq 0 \end{cases}$$

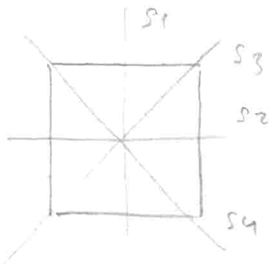
$$= \sum_{u_1^*} \psi_a(-u_1^*(u))\, \psi_a(x)$$

$$= \begin{cases} p^n (\text{если } u = 0)\ \psi_a(x) \\ 0\ (\text{если } u \neq 0) \end{cases}$$

$$\chi_a(x, u, u^*) = \begin{cases} 0 \text{ при } (u, u^*) \neq (0,0) \\ \psi_a(x) p^n \text{ при } (x, u, u^*) = (x, 0, 0) \end{cases}$$

Проверка неприводимости $\mathrm{Ind}_{\mathbb{F}_p \times L}^{H_p^n} \psi_a$:

$$\langle \chi_a, \chi_a \rangle = \underbrace{p^{2n} + \dots + p^{2n}}_{p\text{-раз}} \Big/ \underset{\#H}{\underset{\parallel}{p^{2n+1}}} = 1$$



$s_1, s_3\ s_3, s_4, r_{90}, e$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{matrix} \xrightarrow{s_2} \begin{matrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{matrix} \xrightarrow{s_3} \begin{matrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{matrix} = r_{90}$$

04.05.10. ## Представления симметрической группы

В симметрической группе $\mathfrak{S}_n$ классы смеж[ности]
и представления нумеруются разбиениями
$\alpha \in P(n)$.

Это исключительное св-во симметрической
группы.

Порядки на разбиениях

1. Лексикографический порядок

$\Uparrow$ если элементы во 2 сравнимы => и в 1 они сравнимы

2. $\geq$, порядок примыкания

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \geq (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$$

$$\alpha_1 \geq \beta_1, \ \alpha_1+\alpha_2 \geq \beta_1+\beta_2, \ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \geq \beta_1+\beta_2+\beta_3, \dots$$

$(100, 1 \dots) \ngeq \nleq (90, 89)$ – неполный порядок

Замечание: порядок примыкания слабее, т.к неполный, но его можно уточнить до порядка 1.

Анонс: классификация представлений $\mathfrak{S}_n$

α – разбиение n

13	5	7	8	9
1	2	3		
6	4	10		
11				
12				

Таблица T формы α – это произвольная расстановка чисел от 1 до n в диаграммах α.

С каждой T связано 2 подгрупп: $\underset{\text{row}}{R(T)}$ $\underset{\text{colu[mn]}}{C(T)}$

$\cap$ $\mathfrak{S}_n$ $\cap$

перестановки [сохраняющие строки] действующие внутри строк, т.е элементы переставляются только внутри каждой строки

переста-новки в-нлиции столбцов

Пример: если $\alpha = (1, \dots, 1)$

1
1
1
1
1
1
1
1

, то $R(T) = \{e\}$

$C(T) = \mathfrak{S}$

и наоборот, если $\alpha = n$

1	1	1	1	1	1	1	1

$C(T) = \{e\}$

$R(T) = \mathfrak{S}_n$

$R(T)$ и $C(T)$ не зависят от T (а только от α) в том смысле, что для другой T той же формы
$\subset \mathfrak{S}_n$

$T' = \sigma T$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ $\quad C(T') = \sigma C(T) \sigma^{-1}$

$\downarrow$

правые классы смежности $\quad R(T') = \sigma R(T) \sigma^{-1}$.

$\cap$
$\mathfrak{S}_n$

$\boxed{\mathrm{Ind}_{R(T)}^{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C} =: T_\alpha}$ – представление $\mathfrak{S}_n$, не зависящее от T, а лишь от α.

$\wr\wr\wr$

представление перестановочное в $\mathfrak{S}_n / R(T)$ = множество разбиений $\{1, .., n\}$ на подмножества порядков $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ мощностей (длина строк)

$(n-1)!$ (– число элем. и классов смежности

$\mathfrak{S}_n / R(T) \equiv \{1, \ldots, n\}$

Вариант: $\boxed{T'_\alpha := \mathrm{Ind}_{C(T)}^{\mathfrak{S}_n} \mathrm{sign} = \mathrm{Ind}_{C(T)}^{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C} \otimes \mathrm{sign} \underset{T_{\alpha^T} \otimes \mathrm{sign}}{\parallel}}$

Пример $\mathfrak{S}_4$.

	шт	U (U_4)	U' ($U_{1,1,1,1}$)	V ($U_{3,1}$)	V' ($U_{2,1,1}$)	W ($U_{2,2}$)	T_4	$T_{(3,1)}$	$T_{2,2}$	$T_{2,1,1}$	$T_{1,1,1,1}$
	1	1	1	3	3	2	1	4	6 н-во 3-х элем.	12	24
	6	1	-1	1	-1	0	1	2	2	2	0
	3	1	1	-1	-1	2	1	0	2	0	0
	8	1	1	0	~~0~~	-1	1	1	0	0	0
	6	1	-1	-1	1	0	1	0	0	0	0

порядок $(4) > (3,1) > (2,2) > (2,1,1) > (1,1,1,1)$

$T_4 = U$, $T_{3,1} = U \oplus V$, $T_{2,2} = U \oplus V \oplus W$

подгруппа сохр. 1 элемент

12 34 $\quad$ 34 12

13 24 $\quad$ 34 13

14 23 $\quad$ 23 14

12 3 4
12 4 3

$$T_{2,1,1} = U \oplus 2V \oplus V' \oplus W$$

$$T_{1,1,1,1} = U \oplus 3V \oplus 2W \oplus 3V' \oplus U'$$

Правильно неприводимые представления нумеровать соответственно по первому появлению в T_λ ...

$U_4 := U$

$U_{3,1} := V$

$U_{2,2} := W$

$U_{2,1,1} := V'$

$U_{1,1,1,1} = U'$

Продолжение таблицы характеров:

	T_4'	$T_{3,1}'$	$T_{2,2}'$	$T_{2,1,1}'$	$T_{1,1,1,1}'$
e	24	12	6	4	1
(12)34	0	-2	-2	-2	-1
(12)(34)	0	0	2	0	1
(123)	0	0	0	1	1
(1234)	0	0	0	0	-1

$\parallel$

$T_{1,1,1,1} \cdot \mathrm{sign}$

$T_4 = U \quad T_{3,1} = U \oplus V, \quad T_{2,2} = U \oplus V \oplus W, \quad T_{2,1,1} = U \oplus 2V \oplus$ ...

$T_{1,1,1,1} = U \oplus 3V \oplus 2W \oplus 3V' \oplus U'$

$U_4 := U, \; U_{3,1} := V, \; U_{2,2} := W; \; U_{2,1,1} = V'; \; U_{1,1,1,1} := U'$

$$T_4' = U_4 \oplus 3U_{3,1} \oplus 2U_{2,2} \oplus 3U_{2,1,1} \oplus U_{1,1,1,1}$$

$$T_{3,1}' = U_{3,1} \oplus U_{2,2} \oplus 2U_{2,1,1} \oplus U_{1,1,1,1}$$

$$T_{2,2}' = U_{2,2} \oplus U_{2,1,1} \oplus U_{1,1,1,1}$$

$$T_{2,1,1}' = U_{2,1,1} \oplus U_{1,1,1,1}$$

$$T_{1,1,1,1}' = U_{1,1,1,1}$$

T_α и T_α' содержит единств. общее неприв. представл. U_α

$\dim Hom_{S_n}(T_\alpha, T_\alpha') = 1$

$T_\alpha = U_\alpha + \sum\limits_{\beta<\alpha} K_{\alpha\beta} U_\beta$

базис $\{T_\alpha\}$ выражается через базис $\{U_\beta\}$ матрицей верхнетреугольной с 1 на диагонали $(K_{\alpha\beta})$

$\Downarrow$

$\{U_\beta\} = (K_{\alpha\beta})^{-1}\{T_\alpha\}$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$x + 2y + 3z = a$

$y + 4z = b$

$z = c$

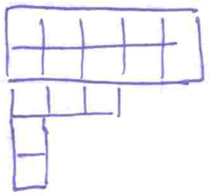
вывод: обратная матрица $(K_{\alpha\beta})^{-1}$ тоже верхнетреугольна и целочисленна => все неприв. х-ры S_n тоже целочисленны.

Завтра 2 пара - лекция
3 пара - семинар.

12 мая - к.р.

05.05.10 **На прошлой лекции:**

Порядок прилегания $\alpha \geq \beta$ на разбиениях n и лексикографический $\alpha \geqslant \beta$ – полный.

α  заполнение числами от 1 до n таблица T формы α

$$R(T) \subset \mathfrak{S}_n \supset C(T)$$

$\boxed{T_\alpha = \mathrm{Ind}_{R(T)}^{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C}}$ ≡ перестановочное предст. на мн-ве разбиений $\{1, \ldots, n\} = A_1 \sqcup A_2 \sqcup \ldots \sqcup A_k$

не зависит от T, зависит от α $\qquad \# A_i = \alpha_i$

$\boxed{T'_\alpha = \mathrm{Ind}_{C(T)}^{\mathfrak{S}_n} \mathbb{C} \otimes \mathrm{sign}}$

Теорема Юнга:

$\dim \mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(T_\alpha, T'_\alpha) = 1$, т.е. единственное общее неприводимое представление V_α.

$V = \oplus V_i^{d_i}$ проектор $p_i \in \mathbb{C}[G]$ на изотипическую компоненту типа i

в алгебре есть умножение и сложение, а групповая алгебра состоит из формальных сумм

$g_1 g_2 = g$

$(g_1 + g_2)(g_3 + g_4) = \boxed{g_1 g_3 + g_1 g_4 + g_2 g_3 + g_2 g_4}$

векторное пр-во над $\mathbb{C}$ типичный вектор с базисом $\{g\}_{g \in G}$

$$\rho : G \to GL(V), \quad g \mapsto \rho(g)$$

$\Downarrow$

$\rho : \mathbb{C}[G] \to gl(V) = \mathrm{End}(V)$ ← матрицы $n \times n$

$\rho(\sum a_i g_i) = \sum a_i \rho(g_i)$

Пример алгебры архетипический.

$Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ — алгебра матриц $n\times n$ над $\mathbb{C}$

если A — алгебра, $\rho : A \longmapsto End(V)$ — представление,

если $\rho(a_1+a_2)=\rho(a_1)+\rho(a_2)$ и $\rho(a_1a_2)=\rho(a_1)\rho(a_2)$

очевидное представление "в себе" — неприводимое

Важно:

у $Mat_{n\times n}=End(V)$ есть единственное неприводимое представление V,

а любое другое представление имеет вид $V\oplus V\ldots\oplus V$

A действует на себе умножением слева $a(b)$ как ab

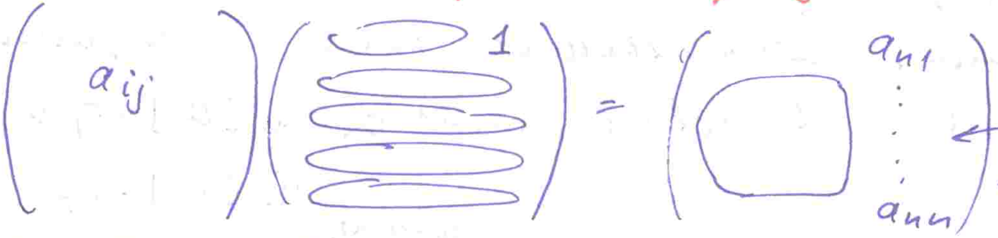
Идеал (левый) — это просто подмодуль A.

Подмодуль:

$I\subset A$ $\quad \lambda i_1+\mu i_2\in I$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$

$ai\in I$ $\forall a\in A$, $i\in I$

Левые идеалы в алгебре матриц $A = End\ V$.



координаты вектора

— идеал минимальный изоморфный как V A-модуль

$\forall$ левый идеал $I\subset \underbrace{End\ V}_{\text{простр-во матриц}}$ имеет вид I_U, где $U\subset V$

$I_U := \{A : A(U)=0\}$

Конструкция неприводимых представлений

$A = End(V)$

$v\in V$ $\quad V\simeq$ минимальному левому идеалу I_U, U — гиперплоскость

$i\mapsto i(v)$ — столбец

$V\simeq A/I_\ell$, где ℓ — прямая

$v\in \ell$

$a\mapsto a(v)$ (при этом $I_\ell\mapsto 0$)

Пример алгебры архетипический.

$Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ — алгебра матриц $n\times n$ над $\mathbb{C}$

если A — алгебра, $\rho : A \longmapsto End(V)$ — представление,

если $\rho(a_1+a_2)=\rho(a_1)+\rho(a_2)$ и $\rho(a_1a_2)=\rho(a_1)\rho(a_2)$

очевидное представление "в себе" — неприводимое

Важно:

У $Mat_{n\times n}=End(V)$ есть единственное неприводимое представление V,

а любое другое представление имеет вид $V\oplus\dots\oplus V$

A действует на себе умножением слева $a(b)$ как

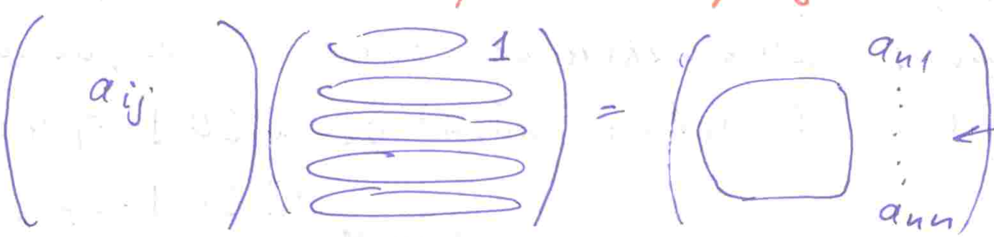
Идеал (левый) — это просто подмодуль A.

Подмодуль:

$I\subset A$ $\quad \lambda i_1+\mu i_2\in I$, $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$

$ai\in I$ $\forall a\in A$, $i\in I$

Левые идеалы в алгебре матриц $A=End\ V$.



координаты вектора

-идеал минимальный изоморфный как V A-модуль

$\forall$ левый идеал $I\subset \underbrace{End\ V}_{\text{прост-во матриц}}$ имеет вид I_U, где $U\subset V$

$I_U := \{A : A(U)=0\}$

Конструкции неприводимых представлений

$A=End(V)$

$V\simeq\forall$ минимальному левому идеалу I_U, U — гиперплоскость

$v\in V$

$i\longmapsto i(v)$ — столбец

$V\simeq A/I_\ell$, где ℓ — прямая

$v\in\ell$

$a\longmapsto a(v)$ (при этом $I_\ell\mapsto 0$)

Теорема Машке

$\mathbb{C}[G] \simeq \bigoplus_i \operatorname{End} V_i$

регулярное представление

$p_i^2 = p_i \quad \operatorname{End} V_i = p_i \, \mathbb{C}[G] \, p_i$

T_λ и T_λ' внутри групповой алгебры

- Возьмем элемент $r(T) \in \mathbb{C}[G]$

$$r(T) = \sum_{\rho \in R(T)} \rho$$

- Возьмем элемент $c(T) \in \mathbb{C}[G]$

$$c(T) = \sum_{\sigma \in C(T)} \sigma (-1)^\sigma$$

$T_\lambda = \operatorname{End}^{S_n}_{R(T)} \mathbb{C} =$ левый идеал $\mathbb{C}[G] \cdot r_T$

если $\varpi' = \varpi \cdot \rho$, то $b_\varpi = b_{\varpi'}$

$\sum a_\pi \cdot \pi \cdot r_T = \sum b_\varpi \varpi$

$T_\lambda' = \operatorname{End}^{S_n}_{C(T)} \mathbb{C} \otimes \text{sgn} =$ левый идеал $\mathbb{C}[G] \cdot c_T$

Утверждение: единственное общее неприводимое представление в левых идеалах $\mathbb{C}[G] \cdot r_T$ и $\mathbb{C}[G] \cdot c_T$

$\mathbb{C}[G] \cdot e_T$, где $e_T =$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}[G] \cdot r_T \arrow[rr, dashed, "\text{сплет.}", "\text{оператор}"'] \arrow[dr, "r_1 \mapsto r_1 c_T"'] & & \mathbb{C}[G] c_T \\ & \mathbb{C}[G] \cdot r_T c_T \arrow[ur, hook] & \end{tikzcd}$$

Предложение:

$e_T = r_T c_T$ – почти проектор, т.е. $e_T^2 = \mu_T e_T$, $\mu_T \in \mathbb{Z}$

$e_T' := \frac{e_T}{\mu_T}$ – проектор

Док-во:

Лемма: $\rho e_T \sigma = (-1)^\sigma e_T$, $\rho \in R(T)$, $\sigma \in C(T)$

Д-во: $\rho r_T c_T \sigma$

$e_T = \sum (-1)^\sigma \rho\sigma$

Ключевая лемма: если $x \in \mathbb{C}[G]$ и $\rho x \sigma = (-1)^\sigma x$, $\forall \rho, \sigma$, то $x \sim e_T$

$x = a \sum (-1)^\sigma \rho\sigma$

Д-во: $x = \sum\limits_{\pi \in S_n} a_\pi \pi = a_e \sum\limits_{\rho,\sigma} (-1)^\sigma \rho\sigma + \sum\limits_{\pi \notin R(T)C(T)} a_\pi \pi$

Мы докажем, что $a_\pi = 0$ для $\forall \pi \notin R(T)C(T)$

Подлемма

Если $\pi \notin R(T)C(T)$, тогда есть 2 числа a, b в одной строке T и одном столбце πT

произвольная расстановка чисел в α:

15	13	11	8	4
8	9	10	5	6
1	3	2		
7				
14				

(a,b) – транспозиция

$(a,b) \in R(T)$

$(a,b) \in C(\pi T) = \pi C(T) \pi^{-1}$

$\pi^{-1}(a,b)\pi = \sigma \in C(T)$

$(a,b) = \pi \sigma \pi^{-1}$

$\pi = \underset{\in R(T)}{(a,b)} \pi \underset{\in C(T)}{\sigma} \Rightarrow a_\pi = -a_\pi = 0$

Д-во подлеммы:

если нет двух чисел в одной строке T и столбце πT, то $\pi \in R(T)C(T)$

Все числа из первого столбца πT лежат в разных строках в T $\Rightarrow$ есть ρ_1 из $R(T)$ т.ч. $\rho_1 T$ имеет первый столбец как πT

Теперь тоже со 2-м столбцом и т.д.

И в конце концов получаем $\rho \in R(T) = \rho_k \rho_{k-1} \cdots \rho_1$ т.ч. ρT имеет такие же мн-ва элементов столбцов, что и πT, т.е $\rho T = \sigma \pi T$, где $\sigma \in C(\pi T)$

$\sigma = \pi \sigma' \pi^{-1}$, $\sigma' \in C(T)$,

тогда $\rho T = \pi \sigma' \pi^{-1} \pi T$

$\rho T = \pi \sigma' T$

$\Downarrow$

$\rho = \pi \sigma' \Leftrightarrow \pi = \rho (\sigma')^{-1}$

Д-во предложение:

$\rho e_T{}^2 \sigma = (-1)^\sigma e_T{}^2 \Rightarrow e_T{}^2 = \mu_T e_T$ для $\mu_T \in \mathbb{Z}$ потому что всё было в $\mathbb{Z}[G]$

Осталось проверить, что $\mu_T \neq 0$.

След e_T в регулярном представлении $Reg = \mathbb{C}[G]$

$\overset{\shortparallel}{n!}$

Но если $e_T{}^2 = 0 \Rightarrow e_T$-нильп $\Rightarrow Tr\, e_T = 0$

Предложение: $\dim \operatorname{Hom}_{S_n} (\mathbb{C}[G]e_T, \mathbb{C}[G]e_T) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{C}[G]e_T$ неприводимо

Д-во: лемма $\operatorname{Hom}_A(Ae, Af) = eAf$ $\qquad e^2 = e$ проектор идемпотент

левый идеал

пусть есть гомоморфизм $\varphi: Ae \to Af$.

1. $\varphi(e) = x \in Af$, тогда $\varphi(ae) = ax$

$\overset{\shortparallel}{\varphi(e^2)} = e\varphi(e) = ex \Rightarrow x \in eAf \Rightarrow \varphi \rightsquigarrow eAf$

Обратно. пусть $x \in eAf \Rightarrow \varphi(ae) = ax$

У нас $\operatorname{Hom}_{\mathbb{C}[G]}(\mathbb{C}[G]e_T, \mathbb{C}[G]e_T) = e_T\mathbb{C}[G]e_T = \mathbb{C}e_T$

по ключевой лемме

т.к $\forall x \in e_T \mathbb{C}[G] e_T$

$\rho x \sigma = (-1)^\sigma x$

Ключевая лемма 2.

Пусть $\alpha > \beta$ лексикографически, T формы α, S формы β, тогда $c_S r_T = 0$.

Следствие 1.

$$e_S e_T = \cancel{\xi} c_S r_T c_T = 0$$

Следствие 2.

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}[G]e_S, \mathbb{C}[G]e_T) = 0$$ т.к. неприв. предст. V_α и V_β разные $\backslash\backslash\ e_S\mathbb{C}[G]e_T$

Надо проверить $e_S \pi e_T = 0 \quad \forall \pi \in \mathfrak{S}_n$

$$e_S(\pi e_T \pi^{-1})\pi = e_S e_{\pi T}\pi = 0$$

Следствие 3.

V^α – все неприв. предст. $\mathfrak{S}_n$

т.к. $\# \underbrace{\mathrm{Irr}}_{\text{неприв}}(\mathfrak{S}_n) = \underbrace{p(n)}_{\text{число разбиений}} = \#\{\alpha\}$

Д-во ключевой леммы: если $\alpha > \beta$, то найдутся два числа (a, b) в одной строке T и в одном столбце S.

если все числа в ~~одном столбце~~ S первой строке T лежат в разных ~~строках~~ T столбцах S, то этих столбцов $\geq$ длины первой строки T, т.е. $\beta_1 \geq \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 = \alpha_1$.
переставим эти числа в 1 строку S, далее.

Далее про вторую строку и т.д. $\Rightarrow \beta = \alpha$ (!X)

есть такие α и β. $\quad \pi = (a, b) \in R(T)$, $\in C(S)$

$$-c_S r_T = (c_S \pi)(\pi r_T) = 0$$

$$\| \quad c_S r_T$$

Следствие 4.

$T_4 \quad T'_{\{1,1,1\}}$ – уменьшаются при уменьшении диаграмм

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(T'_\beta, T_\alpha) = 0$$

$\| \quad \alpha > \beta \quad = c_S \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n] r_T$

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{S}_n}(\mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]c_S, \mathbb{C}[\mathfrak{S}_n]r_T) =$$

$c_S \pi r_T = 0 = c_S \pi r_T \pi^{-1} \pi = c_S r_{\pi T} \pi = 0$

$\boxed{\text{Лекция } 11.05.10}$

Пример. $n = 5$.

$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4&5\\\hline\end{array}$ 5

$\dim V_5 = 1$

$V_5 = \mathbb{C}$

$\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline 3\\\hline 4\\\hline 5\\\hline\end{array}$

$\dim V_{1,1,1,1,1} = 1$
$\shortparallel$
sign

$4, 1$

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&3&4&5\\\hline 2\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&4&5\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&3&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$

$\dim V_{4,1} = 4$

$V_{4,1} =$ тавтолог

$3, 2$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4&5\\\cline{1-2}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&5\\\cline{1-2}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3&5\\\cline{1-2}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2&4\\\cline{1-2}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3&4\\\cline{1-2}\end{array}$

$\dim V_{3,2} = 5$
$\wr$
W

$3, 1, 1$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline 4\\\cline{1-1} 5\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&5\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&5\\\hline 3\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2\\\cline{1-1} 5\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1} 5\\\cline{1-1}\end{array}$

$2, 1, 1$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&4\\\hline 5\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&4\\\hline 2&5\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&5\\\hline 4\\\cline{1-1}\end{array}$

$\dim V_{2,1,1} = 5$
$\wr$
W'

$2, 1, 1, 1$ $\qquad \frac{5!}{(5\cdot 3\cdot 2)} = 4$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 5 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$

$$\dim V_{2,1,1,1} = 4$$
$$\cong V'$$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$

$$\dim V_{\alpha^T} = \dim V_\alpha$$
$$V_{\alpha^T} = V_\alpha \otimes \mathrm{sign}$$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 4 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} 3 \\ \cline{1-1} 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$

V_α = минимальний левий идеал в $\mathbb{C}[S_n]$

$e_T = r_T c_T \qquad V_\alpha = \mathbb{C}[S_n]e_T$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1}\end{array}$

$Reg = \mathbb{C}[S_n] = \oplus V_\alpha^{\dim V_5}$

симметризатор по строкам

$R_T = +(12), (34),$
$+(12)(34),$
$+e$

кососимметризатор по столбцам

$C_T = -(24), -(13), -(15), -(35), -(135), -(153), +e,$
$+(24)(13), +(24)(15), +(24)(35), -(24)(135),$
$-(24)(153)$

Давайте копию V_α вида $\mathbb{C}[S_n]e_T$ называть V_T. и докажем Лемму: для стандартных таблиц T форм α все V_T образуют прямую сумму, т.е линейно независимы.

Подлемма: если стандартная $T >$ стандартной S (формы α) лексикографически, то $e_S e_T = 0$.

$$r_S \underbrace{c_S r_T}_{=0} c_T$$

т.е. при чтении 1-ой строки слева → направо, потом второй и т.д.

$$\begin{array}{lll}1&4&5\\2\\3\end{array} > \begin{array}{lll}1&2&3\\4\\5\end{array} < \begin{array}{lll}1&2&4\\3\\5\end{array} < \begin{array}{lll}1&3&4\\2\\5\end{array} < \begin{array}{lll}1&3&5\\2\\4\end{array} > \begin{array}{lll}1&2&5\\3\\4\end{array}$$

Д-во: нужно проверить, что есть 2 числа (a,b) в одном столбце T и о...

$$\begin{array}{lll}1&3&5\\2\\4\end{array} \qquad \begin{array}{lll}1&2&4\\3\\5\end{array} \qquad (a,b)=(1,2)$$

Пусть $T \ni t > s \in S$ — первое расхождение в k-ой строке и l-столбце. s где-то дальше встречается в T в u-м столбце v-й строке.

$v \geq l$, то т.к. T — стандартная ⇒ столбец $u < k$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&5\\\hline 2\\\cline{1-1} 4\\\cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&4\\\hline 3\\\cline{1-1} 5\\\cline{1-1}\end{array}$$

$T \qquad\qquad S$

$$13524 > 12435$$
$$t=3 \qquad s=2$$

Есть некий элемент r в u-м столбце и l-ой строке диаграммы T.

$$(r,s)=(a,b)$$

Д-во леммы:

пусть $\sum\limits_{S\text{-стандартная}} a_S e_S = 0$

$a_S \in \mathbb{C}[S_n]$

Хотим д-ть $a_S \equiv 0$.

иначе выберем лексикографически наибольший T т.ч. $a_T \neq 0$. $(\sum a_S e_S) e_T = a_T e_T^2 = a_T e_T$

Вывод: $\dim V_\alpha$ = число стандартных таблиц формы α.

d_α – количество стандартных таблиц

Достаточно теперь проверить, что $\sum\limits_\alpha d_\alpha^2 = n!$

$$\sum_\alpha (\dim V_\alpha)^2 = n!$$

Алгоритм (соответствие) Робинсона–Шенстеда–Кнута
Knuth

Биекция между $S_n \longleftrightarrow \{(T,S)\}$ – стандартные таблицы одинаковой формы

выпихивание

Мультфильм РШК

$\sigma = (3, 2, 5, 9, 1, 8, 7, 4, 6)$

$$\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 2\\\hline\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&5&9\\\hline 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&5&9\\\hline 2\\\cline{1-1} 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&5&8\\\hline 2&9\\\cline{1-2} 3\\\cline{1-1}\end{array}\quad
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&5&7\\\hline 2&8\\\cline{1-2} 3&9\\\cline{1-2}\end{array}$$

[приписываем в строку справа, выпихиваем ↓]

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&7\\\hline 2&5\\\cline{1-2} 3&8\\\cline{1-2} 9\\\cline{1-1}\end{array}\quad
① \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&6\\\hline 2&5&7\\\hline 3&8\\\cline{1-2} 9\\\cline{1-1}\end{array}$$

во второй ② таблице в клетке стоит номер шага на котором она была заполнена.

$$① \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&4&6\\\hline 2&5&7\\\hline 3&8\\\cline{1-2} 9\\\cline{1-1}\end{array}\qquad
② \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&4\\\hline 2&6&9\\\hline 5&7\\\cline{1-2} 8\\\cline{1-1}\end{array}$$

Обратно: смотрим во вторую таблицу, какая клетка заполнилась последней. Пусть в ней стоит число A в первой таблице, если A в первой строке, то A стояло в нашей перестановке на последнем месте, иначе в предыдущей строке ищем самый правый $b < A$, ставим

А на его место, вдвигаем в предыдущую строку, тот элемент который выпихнули в первую строку и есть последний элемент нашей перестановки σ.

$1 \to 3$
теперь
$3 \to 1$

Мы построили в V_α базис v_T, занумерованный стандартными таблицами формы α.

Следствие конструкции. Правило ветвления.

$$V_\alpha \big|_{S_{n-1}} = \bigoplus V_{\alpha'} \text{ - сумма по всем диаграммам Юнга}$$ получаемые вычёркиванием одной клеточки

$\Updownarrow$

$$\mathrm{Ind}_{S_{n-1}}^{S_n} U_\beta = \bigoplus U_{\beta'}$$, где β' получено добавлением одной клеточки