Лекция 13.04. Индуцированные представления.

① Формула взаимности Фробениуса

$H \subset G$, (W, π) - представление H

(V, ρ) - представление $G \to GL(V)$

$$\mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V) \underset{\psi}{\rightleftarrows} \mathrm{Hom}_H(W, \mathrm{Res}_G^H V)$$ — Предложение

$$\mathrm{Ind}_H^G W = \oplus V_i^{d_i}$$

$$\dim \mathrm{Hom}_G(\mathrm{Ind}_H^G W, V_i) = d_i$$

Д-во. $\left\{ \mathrm{Ind}_H^G W = \bigoplus\limits_{s \in G/H} sW \right\}$ ↓ подпредставление

$$\mathrm{Ind}_H^G W = \bigoplus\limits_{s \in G/H} sW \xrightarrow{A} V$$

↓ матрица

	W	sW
W		
sW		

$\psi(A) = A|_W$

Надо доказать, что ψ - инъекция (а) и сюръекция (б)

а) $\psi(A) = 0 \Rightarrow A = 0$

$A|_W = 0$

$A(sw) = sA(w) = 0 \Rightarrow A \equiv 0$

б) Пусть B - H-сплетающий оператор из W в V

Тогда $A|_W = B$

$A(sw) := sA(w) = sB(w)$

$\Downarrow$

A - G-сплетающий оператор

Функтор Ind сопряжен слева функтору Res

② Характер $\mathrm{Ind}_H^G W$

$\chi_W : H \to \mathbb{C}$

$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W} : G \to \mathbb{C}$

$G \ni g : sW \to \overset{\in G/H}{gs}\, W$

если $gs \neq s$, то вклад в след нулевой

$$\chi_{\mathrm{Ind}_H^G W}(g) = \sum_{\substack{s \in G/H \\ gs = s \in G/H}} \mathrm{Tr}\left[\rho(g) : sW \to sW\right] = \sum_{\substack{s \in G/H \\ s^{-1}gs \in H}} \mathrm{Tr}\, \rho(g) : sW \to sW =$$

$gs = s \in G/H$

$\Updownarrow$

$\exists h \in H : gs = sh$

$s^{-1}gs = h \in H$

$$= \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}gs \in H}} \mathrm{Tr}\left[\rho(g) : sW \to sW\right]$$

Утверждение: $\mathrm{Tr}\left[\rho(g) : sW \to sW\right] = \underbrace{\mathrm{Tr}\left[\pi(s^{-1}gs) : W \to W\right]}_{\chi_\pi(s^{-1}gs)}$

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\pi(s^{-1}gs)"] \arrow[d, "s"] & W \arrow[d, "s"] \\
sW \arrow[r, "\rho(g)"] & sW
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{\chi_{\mathrm{Ind}_H^G (W,\pi)}(g) = \frac{1}{\#H} \sum_{\substack{s \in G \\ s^{-1}gs \in H}} \chi_\pi(s^{-1}gs)}$$

Группа Гейзенберга H_p^n

$px - xp = \mathrm{Id}$

$[p, x] = 1$

$p, x : V \circlearrowleft$

$p = \frac{\partial}{\partial x}$

$\frac{\partial}{\partial x}(xf) - x\frac{\partial}{\partial x}(f) = f$

№3. Классы сопряжённости в H_p^n

$L = \mathbb{F}_p^n, \quad \overset{M}{\overset{\|}{L \oplus L^*}}$
(u, u^*)

билинейная форма кососимметричная со значениями в $\mathbb{F}_p$

$\langle (u_1, u_1^*)\ (u_2, u_2^*) \rangle = u_2^*(u_1) - u_1^*(u_2)$

Группа Гейзенберга $\quad \mathbb{F}_p \times M \quad [m_1, m_2] = \langle m_1, m_2 \rangle \in \mathbb{F}_p$

$(x, m) \qquad m_1 m_2 m_1^{-1} m_2^{-1}$

(x, u, u^*)

$(0, m_1)(0, m_2)(0, m_1)^{-1}(0, m_2)^{-1} = (\langle m_1, m_2 \rangle, 0)$

Классы сопряжённости: 1) $e = (0,0,0) \qquad [(0,0,0)(x,u,u^*) = (0,u,u^*)]$

2) $(1,0,0)$ центральный элемент

$(2,0,0)$

$\dots$ коммутируют со всеми элементами

p) $(p-1,0,0)$ (классы в центре $\Rightarrow$ состоят из 1 элемента)

p+1) (что угодно, m) $- p^{2m} - 1$ - штук (?)

$\{ (0,m')(0,m)(0,m')^{-1} = (\langle m', m \rangle, m) \Rightarrow$ вывод (что угодно, m) - образует класс сопряжённости $\}$

Теперь найдём характеры:

$W_a = \mathrm{Ind}_{\mathbb{F}_p \times L}^{H_p^n} \psi_a \; ; \; \psi_a : \underset{\text{порядок } p}{\mathbb{F}_a} \times \underset{\text{порядок } p^n}{L} \to \mathbb{C}^*$

$\psi_a(x, u) = e^{\frac{2\pi i a x}{p}}$

$\chi_a^{(x,u,u^*)} = \frac{1}{|H|} \sum_{\substack{(x,u,u^*)=s \\ s^{-1}gs \in \mathbb{F}_p \times L}} \psi_a(s^{-1}gs) = $ 0, если $u^* \neq 0$, иначе $\frac{1}{p^{n+1}} \sum_{x,u,u_1^*} \psi_a \langle (u_1, u_1^*), (u, 0) \rangle =$

$\frac{1}{|H|} = \frac{1}{p^{n+1}}$

$= \frac{1}{p^{n+1}} \sum_{x, u_1, u_1^*} \psi_a(-u_1^*(u))$

$\underset{s^{-1}}{(x_1, u_1, u_1^*)^{-1}} \underset{g}{(x, u, u^*)} \overset{s}{(x, u_1, u_1^*)^{-1}} = (x + \langle (u_1, u_1^*)(u, u^*) \rangle, u, u^*)$

$=$ Ответ

Ответ: $\chi_a(x, u, u^*) =$

$= 0$, при $(u, u^*) \neq (0,0)$

$= \psi_a(x) \cdot p^n$ при $(x, u, u^*) = (x, 0, 0)$

$\sum_{u_1^*} \psi_a(-u_1^*(u)) = \begin{cases} p^n \psi_a(x), \text{ если } u = 0 \\ 0, \text{ если } u \neq 0 \end{cases}$

все сократятся если $u \neq 0$

Проверка неприводимости индуцированного представления $\mathrm{Ind}_{F_p \times L}^{H_p^n} \psi_a$:

$$\langle \chi_a, \chi_a \rangle = (\underbrace{p^{2n} + \ldots + p^{2n}}_{p \text{ раз}}) / p^{2n+1} = 1$$