Лекция 6.04.

# Индукция

Разложение представления на неприводимые

$\mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$. Нет способа однозначно разложить представление на неприводимые слагаемые.

$V = \bigoplus_i V_i^{\alpha_i}$ - разложение на изотипические компоненты

(где $V_i^{\alpha_i}$ - все слагаемые одного типа)

$V_i^{\alpha_i} = V_i \otimes \mathbb{C}^{\alpha_i}$ ; $(V \oplus V) \oplus U \oplus (W \oplus W \oplus W)$

Теорема: изотипические компоненты определены однозначно и являются образами проекторов $p_i := \frac{\dim V_i}{|G|} \sum_G \overline{\chi_i(g)} \rho(g)$

$\left\{ g \in G,\ \rho(g);\quad p_i : V \to V \text{ и } p_i^2 = p_i \right\}$

Напоминание: пусть $(\rho, V)$ - неприводимое представление; $f$ - центральная функция на группе

$\rho(f) := \sum f(g)\rho(g)$

$\rho(f) =$ скалярная матрица $\lambda$

по лемме Шура, где $\lambda = \frac{|G|}{\dim V} \langle \bar{f}, \chi_V \rangle$

$\Big\{$ Вычислим $\lambda$: $\operatorname{Tr} \rho(f) = \dim V \cdot \lambda$

$\operatorname{Tr} \rho(f) = \sum_G \operatorname{Tr}(f(g) \cdot \rho(g)) = \sum_G f(g) \chi_V(g) = |G| \langle \bar{f}, \chi_V \rangle \Big\}$

Д-во Теоремы: $V = V_1^{\alpha_1} \oplus \ldots \oplus V_k^{\alpha_k}$

Как $p_i$ действует на слагаемое $V_1^{\alpha_1} = \underbrace{V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{\alpha_1}$

$p_i = \rho(\overline{\chi_i}) \frac{\dim V_i}{|G|}$ - но это оператор умножения на скаляр на $V_1^{\alpha_1}$

$\lambda = \frac{|G|}{\dim V} \langle \chi_i, \chi_1 \rangle$, $\bar{f} = \chi_i$, $\langle \chi_i, \chi_1 \rangle = 0$

Вывод: $p_i$ заведомо обнуляет все слагаемые не изоморфные $V_i$

Осталось убедиться, что $p_i$ на $V_i$: $p_i|_{V_i} = 1 \cdot Id$, $1 = \lambda$

$\lambda = \frac{|G|}{\dim V} \cdot \frac{\dim}{|G|} \langle \chi_i, \chi_i \rangle = 1$

✓ ☒

... строить представления группы $G$, исходя из представления подгруппы $H \subset G$.

$$G_6 \supset G_3 \times G_3$$
$$\cup \quad \supset \quad G_2 \times G_2 \times G_2$$
$$G_2 \times G_3$$

Определение: пусть $(W, \pi)$ - представление подгруппы $H \subset G$
$(V, \rho) = Ind_H^G (W, \pi)$ = функции из $G$ в $W$, такие что
$$f(hg) = \pi(h) f(g) \quad \forall h \in H$$
Как там действует $G$?
$$(\rho(g) f)(g') := f(g'g)$$

Напоминание: $Reg = \mathbb{C}[G] = Ind_{\{e\}}^G \mathbb{C}$
$$g(x) = gx$$
$$\mathbb{C}[G] = \langle \delta_e, \delta_g, \ldots \rangle$$
$$\boxed{\rho(g) f}(x) := f(g^{-1}x)$$

...дение: $\mathbb{C}[G]$ - групповая алгебра (относительно умножения
...тки $\delta_{g_1} * \delta_{g_2} = \delta_{g_1 g_2}$
$$f * f'(g) = \sum_{x \in G} f(x) f'(x^{-1} g)$$
$\mathbb{C}[G] \Rightarrow \rho(f) : V \circlearrowleft$
$\ldots) \cdot \rho(f') = \rho(f * f')$
...представление групповой алгебры, т.е. гомоморфизм из $\mathbb{C}[G]$ в
...$(V)$
$\rho(f + f') = \rho(f) + \rho(f')$

$\mathbb{C}[H] \to End\, W$
$$Ind_H^G W := \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[H]} W$$

{ Напоминание о тензорном произведении: оно порождено выражениями

$f \otimes w$, где $f \in \mathbb{C}[G]$, $w \in W$

$f \otimes \pi(\varphi) w = (f * \varphi) \otimes w$

умножение свертки в $\mathbb{C}[G] = \mathbb{C}[H]$ }

Определение: $V \supset W$ - подпредставление при ограничении на $H$

пред. $G \supset H$

$V = \bigoplus_{G/H} g W$ , а $W = e W$ образуют подгруппу отн. $H$

№12

1) $G =$ симметрии $n$-угольника; $H =$ повороты $\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$H =$ повороты $\simeq \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

$\rho_m = \mathrm{Ind}_H^G$

$n$ классов сопряж.; $\underset{\dim H}{n} = a_1^2 + \dots a_n^2 \Rightarrow n$ одномерных представлений

(разных, неприводимых)

$\chi_m \; (k \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \exp\left(\frac{2\pi k m i}{n}\right)$

$m = 1, \dots, n$

2) $\mathrm{Ind}_H^G \chi_m$ ; $G = \{r^0, r^1, \dots, r^{n-1}, s, sr^1, \dots, sr^{n-1}\}$ $r^k s = s r^{-k}$

a) $\mathrm{Ind}_H^G \underset{\chi_0}{\mathbb{C}}$ = функции из $G$ в $\mathbb{C}$ такие что $f(hg) = f(g)$

$\mathbb{C}[G/H] = \mathbb{C}[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}] =$

$= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

постоянные функции

$\mathrm{triv}$

$\mathrm{sign}$ функции с суммой 0

б) $\mathrm{Ind}_H^G \chi_1$ = функции из $G$ в $\mathbb{C}$ такие что

$f(r^k g) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right) f(g)$

Такая функция определяется своими значениями в $e$ и в $s$

$\Downarrow$ размерность 2

базис $f_0(e) = 1$, $f_0(s) = 0$

$f_1(e) = 0$, $f_1(s) = 1$

$r^k f_0 = a f_0 + b f_1$

$a = (r^k f_0)(e) = f_0(r^k) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)$

$b = (r^k f_0)(s) = f_0(s r^k) = 0$

$r^k f_1 = c f_0 + d f_1$

$c = (r^k f_1)(e) = f_1(r^k) = 0$

$d = (r^k f_1)(s) = f_1(sr^k) = f_1(rs^{-k}) = \exp\left(\frac{-2\pi i k}{n}\right)$

$$\Downarrow$$

$$\begin{pmatrix} e^{\frac{2\pi i k}{n}} & 0 \\ 0 & e^{\frac{-2\pi i k}{n}} \end{pmatrix}$$

$sr^k f_0 = \alpha f_0 + \beta f_1$

$\alpha = sr^k f_0(e) = f_0(sr^k) = 0$

$\beta = sr^k f_0(s) = f_0(ssr^k) = f_0(r^k) = \exp\left(\frac{2\pi i k}{n}\right)$

$sr^k f_1 = \gamma f_0 + \delta f_1$

$\gamma = sr^k f_1(e) = f_1(sr^k) = \exp\left(\frac{-2\pi i k}{n}\right)$

$\delta = sr^k f_1(s) = f_1(ssr^k) = f(r^k) = 0.$