Лекция №4.

Примеры.

1 Характеры S_5 1) Сначала перечислим все классы сопряженности

	χ_U	$\chi_{U'}$	χ_V	$\chi_{V'=V\otimes U'}$	$\chi_{\Lambda^2 V}$	χ_W	$\chi_{W'}$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\1&2&3&4&5\end{pmatrix}$ 1 шт	1	1	4	4	$6 = \frac{1}{2}16-\frac{1}{2}\cdot 4$	$5 = \dim W$	5
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&4&5\end{pmatrix}$ 10 шт	1	−1	2, $3-1=2$	−2	$0 = \frac{1}{2}\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 4$	$a = 1$	$-a = -1$
$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&4&3&5\end{pmatrix}$ $\frac{30}{2}$ шт $= 15$ шт	1	1	0	0	−2	$b = 1$	$b = 1$
(123) 20 шт	1	1	1	1	0	$c = -1$	$c = -1$
$(123)(45)$ 20 шт	1	−1	−1	1	0	$d = 1$	$-d = -1$
(1234) 30 шт	1	−1	0	0	$0 = \frac{1}{2}\cdot 0-\frac{1}{2}\cdot 0$	$e = -1$	$-e = 1$
24 шт	1	1	−1	−1	1	$f = 0$	$f = 0$

2) Далее пишем характеры

здесь просто всегда вычитаем 1

убираем одну точку

$$\chi_{\Lambda^2 V}(g) = \frac{1}{2}\chi_V^2(g) - \frac{1}{2}\chi_V(g^2)$$

{ Что такое $\Lambda^2 V$? –

– Это $g(v_1 \wedge v_2) = gv_1 \wedge gv_2$

$\Lambda^2 V = \langle v_1 \wedge v_2 \rangle$ }

3) Что можно сказать о размерности W и W'?

$$\mathbb{C}[G] = \oplus V^{\lambda_i}$$

$$\langle \chi_i, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle$$

$V = \mathbb{C}[G]$

базис δ_g $\quad \rho(g)\delta_h = \delta_{gh}$

$$\chi_{\mathbb{C}[G]}(g) = \begin{cases} |G|, & g = e \\ 0, & g \neq e \end{cases}$$ } характер регулярного представления

$$\Downarrow$$

$$\langle \chi_i, \chi_{\mathbb{C}[G]} \rangle = \chi_i(e) = \dim V_i$$

...учается, что регулярное представление

$$\mathbb{C}[G] = \underbrace{V_1 \oplus \ldots \oplus V_1}_{\dim V_1} \oplus \underbrace{V_2 \oplus \ldots \oplus V_2}_{\dim V_2} \oplus \ldots = \oplus V_i^{\dim V_i}$$

$$\boxed{\text{...дствие: } |G| = \sum_{\chi} (\dim V_i)^2}$$

$\Downarrow$

$$120 = 1+1+4^2+6^2+\underset{\dim W}{\underset{\parallel}{n^2}}+n^2+4^2 \Rightarrow 2n^2 = 50$$

$$\underline{n = 5 = \dim W}$$

Найдем χ_W и $\chi_{W'}$

$\langle \chi_W, \chi_W \rangle = 1$

$\parallel$

$$\frac{1}{120}(25 + 10a^2 + 15b^2 + 20c^2 + 20d^2 + 30e^2 + 24f^2) = 1 \qquad (1)$$

$\langle \chi_W, \chi_U \rangle = 0$

$\parallel$

$$5 + 10a + 15b + 20c + 20d + 30e + 24f = 0 \qquad (2)$$

$\langle \chi_W, \chi_{N'V} \rangle = 0$

$\parallel$

$$30 - 30b + 24f = 0 \Rightarrow \boxed{5b - 4f = 5} \quad (3)$$

$\langle \chi_W, \chi_{U'} \rangle = 0$

$$5 - 10a + 15b + 20c - 20d - 30e + 24f = 0 \qquad (4)$$

$$(2)+(4): \quad 10 + 30b + 40c + 48f = 0 \Rightarrow \boxed{5c + 9f = -5}$$

$$(2)-(4): \quad 20a + 40d + 60e = 0 \Rightarrow \boxed{a + 2d + 3e = 0}$$

$\langle \chi_W, \chi_V \rangle = 0$

$\parallel$

$$20 + 20a + 20c - 20d - 24f = 0$$

2. $Sym^3 V$

$\chi(g) = \mathrm{Tr}\, \rho(g) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$ – собственные числа $\rho(g)$

$n = \dim V$

ξ_i – корни k-й степени из 1, где $k = \mathrm{ord}\, g$

a) $\mathrm{Tr}\, \mathrm{Sym}^3 \rho(g)$

$$\rho(g) = \begin{pmatrix} \xi_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \xi_n \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}\, \rho^{\otimes 3} = \left(\mathrm{Tr}\, \rho(g)\right)^3 + a\left(\mathrm{Tr}\, \rho(g^2)\right)$$

$$\sum_{1 \le i \le j \le l \le n} \xi_i \xi_j \xi_l = h_3(\xi) = ?p_1^3 + ?p_1 p_2 + ?p_3$$

3) $\mathrm{Tr}\, \rho(g^a) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^a = p_a(\xi)$