Лекция N3 23.03.2010

Соотношения ортогональности для матричных коэффициентов

V, ρ, G_3

	ρ_{11}	ρ_{12}	ρ_{21}	ρ_{22}
$\rho(e) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	1	0	0	1
$\rho\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	-1	1	0	1
$\rho\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	1	0	1	-1
$\rho\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	0	-1	-1	0
$\rho\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	-1	1	-1	0
$\rho\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$	0	-1	1	-1

$A: \overset{\rho_1}{V_1} \to \overset{\rho_2}{V_2}$

$M: V_1 \to V_2$ сплетающий оператор ~ усреднение A

$$M = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho_2(g^{-1}) A \rho_1(g)$$

2 случай: изоморфны

$A: \overset{\rho}{V} \to \overset{\rho}{V}$

$M: V \to V$

$$\underset{\lambda Id}{\overset{\parallel}{M}} = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g^{-1}) A \rho(g)$$

Лемма Шура

$$\lambda = \frac{\mathrm{Tr} A}{\dim V} = \frac{1}{\dim V} \sum_{b,c} A_{bc} \delta_{bc}$$

представим в матричном виде

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g,b,c} \rho_{ab}(g^{-1}) A_{bc} \rho_{cd}(g) = M_{ad} = \lambda \delta_{ad} = \frac{1}{\dim V} \sum_{b,c} \delta_{bc} \delta_{ad} A_{bc}$$

$$\Downarrow$$

т.к. это верно тождественно по переменным a, b, c, d, все коэффициенты при них должны совпадать, т.е.

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho_{ab}(g^{-1})\rho_{cd}(g)=\frac{1}{\dim V}\sum\delta_{bc}\,\delta_{ad}\quad\forall b,c,a,d$$

Формула ортогональности для матричных коэффициентов:

$$\sum_{g}\rho_{ab}(g^{-1})\rho_{cd}(g)=0 \text{ если } a\neq d \text{ или } b\neq c$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g}\rho_{ab}(g^{-1})\rho_{ba}(g)=\frac{1}{\dim V} \text{ если } a\neq d,\ b=c$$

Соотношение ортогональности для характера

Следствие: а) Пусть χ, χ' разные нетривиальные характеры, тогда

$$\langle\chi,\chi'\rangle=0$$

$$\|$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\overline{\chi}(g)\chi'(g)$$

$$\|$$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\chi(g)$$

б) $\langle\chi,\chi\rangle=1$

Д-во: $\chi(g)=\sum_{a}\rho_{aa}(g)$

$$\langle\chi,\chi\rangle=\frac{1}{|G|}\sum_{g,a,b}\rho_{aa}(g^{-1})\rho_{bb}(g)=\frac{\dim V}{|G|}\cdot\frac{|G|}{\dim V}=1$$

Пусть W - какое-либо представление; раскладывается в сумму неприводимых

$$W=V_1^{\oplus\alpha_1}\oplus V_2^{\oplus\alpha_2}\oplus\ldots\oplus V_n^{\oplus\alpha_n}$$

- Как найти кратности α_i?

Пусть χ - характер W, χ_i - характер неприводимого V_i

$$\Downarrow$$

$\boxed{\alpha_i=\langle\chi_i,\chi\rangle}$, т.к. $\chi\overset{def}{=}\sum\alpha_i\chi_i$

• Различных неприводимых представлений $\le$ числа классов сопряженности

Групповая алгебра

$\mathbb{C}[G]$ - функции на группе (со значением в $\mathbb{C}$) - их можно перемножать „свертка"

базис в $\mathbb{C}[G]$ $\quad \delta_g \delta_h = \delta_{gh}$

$$\boxed{f_1 * f_2(g) = \sum_{h\in G} f_1(h) f_2(h^{-1}g)}$$

$$f = \sum_{g\in G} f(g)\delta_g$$

Утверждение: $f(g) = f(hgh^{-1}) \; \forall h$

Пусть f постоянна на классах сопряженных элементов $\Rightarrow$ f - центральна, т.е.

$$f * f' = f' * f \quad \forall f'$$

Д-во: $\sum\limits_{h\in G} f(h) f'(h^{-1}g) = f * f'(g)$

$\qquad \| ?$

$$\sum_{x\in G} f'(x) f(x^{-1}g) = f' * f(g)$$

$$x = h^{-1}g$$

$$\sum_{h\in G} f'(h^{-1}g) f(g^{-1}hg) = \sum_{h\in G} f(h) f'(h^{-1}g) \qquad \blacksquare$$

• В частности, характеры центральны

Рассмотрим W, ρ - произвольное представление G. Тогда $\mathbb{C}[G]$ действует на W

$$f \in \mathbb{C}[G] \rightsquigarrow \rho(f) \in \mathrm{End}\, W$$

$$\rho(f) = \sum_{g\in G} f(g)\rho(g)$$

нужно проверить: $\rho(f_1 * f_2) = \rho(f_1)\cdot\rho(f_2)$

Предложение: Пусть χ - характер неприводимого представления (V, ρ)

(V', ρ') - другое неприводимое представление

$$\rho'(\chi) = \begin{cases} 0, & V' \not\cong V^* \\ \lambda \mathrm{Id}, & V' \cong V^*, \quad \lambda = \dfrac{|G|}{\dim V} \end{cases}$$

Д-во: Лемма Шура:

χ - центр. функция $\Rightarrow \rho'(\chi)$ коммутирует с $\rho'(G)$ и равен константе λI_d

$\lambda = \frac{1}{\dim V} \cdot Tr\, \rho'(\chi)$

$\left(\left(\rho'(\chi) = \sum_{g \in G} \chi(g) \rho'(g)\right)\right.$

$\frac{1}{\dim V'} \sum_{g \in G} \chi(g)\, Tr\, \rho'(g) =$

$= \frac{1}{\dim V} \sum_{g \in G} \chi(g) \chi'(g) = \langle \bar{\chi}, \chi' \rangle \cdot \frac{|G|}{\dim V'}$

$\boxtimes$

Теорема: Число разных представлений равно числу классов сопряжённых элементов, а $\sum (\dim V_i)^2 = |G|$

Д-во: 1) надо проверить, что неприводимые характ. χ_i образуют базис в $\mathbb{C}[G]$ - центр. функций; т.е., что если центральная функция f ортогональна всем характерам χ_i, то $f \equiv 0$.

Мы только что проверили, что если $\langle \chi_i, f \rangle = 0$, то $\rho_i(\bar{f}) = 0 \Rightarrow \bar{f}$ действует нулем в любом представлении ρ, например в $\mathbb{C}[G]$ - регулярное представление

$\rho(f)\delta_e = \sum_{g \in G} \bar{f}(g) \delta_g = \bar{f}$

$f' = \sum_{g \in G} \bar{f}(g) \delta_g$

2) Пусть χ - характер регулярного представления $\mathbb{C}[G]$

$\chi(g) = \begin{cases} 0, & g \neq e \\ |G|, & g = e \end{cases}$

$\mathbb{C}[G] = \oplus V_i^{\oplus \alpha_i}, \quad \chi = \sum \lambda_i \chi_i$

$\langle \chi, \chi \rangle = |G|$

$\overset{\parallel}{\sum \alpha_i^2}$

Осталось проверить, что $\alpha_i = \dim V_i$