Лекция 2 Характеры

ρ, V : линейное действие группы G на векторном пространстве V: $\rho: G \to GL(V)$

Конструкции:

1. Перестановочное представление $G : X \circlearrowleft \pi \Rightarrow G : \mathbb{C}[X] \circlearrowleft \rho$
2. $(\rho_1, V_1) \oplus (\rho_2, V_2)$
3. $(\rho_1, V_1) \otimes (\rho_2, V_2)$
4. $\Lambda^i(\rho, V)$, $Sym^i(\rho, V)$

Теорема о полной приводимости над $\mathbb{C}$

Если $(\sigma, W) \subset (\rho, V)$
представление

То можно выбрать G-инвариант. прямое дополнение W' к W

$$\begin{array}{c|cc} & W & W' \\ \hline W & \sigma & ? \\ W' & 0 & ? \end{array}$$

Д-во: $W' = W^{\perp}$ - ортогональное дополнение; чтобы $W^{\perp}$ было тоже G-инвариантно - достаточно, чтобы $(\, , \,)$ было G-инвариантным, т.е. $(v_1, v_2) = (\rho(g)v_1, \rho(g)v_2)$ $\forall v_1, v_2, g \in G$

Берем любое $\langle \, , \, \rangle$ и усредняем

$$(v_1, v_2) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \langle \rho(g)v_1, \rho(g)v_2 \rangle$$ - очевидно, G-инвариантно.

Чтобы гарантировать невырожденность $(\, , \,)$ нужно начать с положительно определенного эрмитова $\langle \, , \, \rangle$ $\langle v, v \rangle > 0$

{Эрмитово: $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

$\langle v, \lambda w \rangle = \bar{\lambda} \langle v, w \rangle$

$\langle v + v', w \rangle = \langle v, w \rangle + \langle v', w \rangle$ }

Заодно получилось, что $W \cap W' = 0 \Rightarrow W \oplus W^{\perp} = V$

$\Downarrow$

$\blacksquare$

Следствие: $\forall$ представление над $\mathbb{C}$ изоморфно прямой сумме неприводимых $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$; $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$, $\circlearrowleft \zeta^i$

Поэтому для классификации всех представлений достаточно описать все неприводимые.

Анонс: число разных неприводимых представлений конечно и равно числу классов сопряженности в G.

Сумма квадратов размерностей этих представлений равна $|G|$.

Каждому неприводимому представлению сопоставим его характер

$\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}_V \rho(g)$

Функция на G, т.что $\chi_\rho(hgh^{-1}) = \chi_\rho(g)$ $\forall g, h$ центральная

Введем на $\mathbb{C}[G]$ эрмитово скалярное произведение:

$(f_1, f_2) = \frac{1}{|G|}\sum_G f_1(g)\overline{f_2}(g)$

$(\chi, \chi) = 1$

$(\chi, \chi') = 0$, если $\chi' \neq \chi$

И вообще, характеры разных неприводимых представлений образуют ортонормальный базис в центральных функциях $\mathbb{C}[G]^G$

Лемма Шура: пусть $M : (\underset{\circlearrowleft g}{\rho_1}, V_1) \xrightarrow{M} (\underset{\circlearrowleft g}{\rho_2}, V_2)$ - сплетающий оператор

$\rho_2(g)M = M\rho_1(g)$ $M : V_1 \to V_2$

V_1, V_2 - неприв. представление

Тогда $M = const$ - скалярный оператор

если $V_1 \not\simeq V_2$, то $M = 0$

если $V_1 = V_2$, то $M = \lambda$ $\begin{pmatrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{pmatrix}$

$\underset{V_1}{\overset{\cap}{\ker M}}$, $\underset{V_2}{\overset{\cap}{\mathrm{Im}\, M}}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \ker M = \left[\begin{matrix} 0 \\ V_1 \end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$ $M = 0$, либо $M = 0$, либо M - изоморфизм

$\mathrm{Im}\, M = \left[\begin{matrix} V_2 \\ 0 \end{matrix}\right.$ $\Rightarrow$

$(\rho, V) \circlearrowleft M = const$

над $\mathbb{C}$ у M есть собственный вектор v с собственным значением λ

$Mv = \lambda v \in Ker\,(M - \lambda Id)$: подпредставление $V \Rightarrow$

$\Rightarrow Ker\,(M - \lambda Id) = V \Rightarrow M = \lambda\, Id$

$\Downarrow$

$\blacksquare$

Как строить сплетающие операторы:

$M \in Hom\,(V_1, V_2) = V_1^* \otimes V_2$

Ещё одна конструкция представлений: двойственное

$(\rho, V) \longrightarrow (\rho^*, V^*)$

$\langle \rho^*(g) v^*, v \rangle := \langle v^*, \rho(g^{-1}) v \rangle$

$A = \rho(g)$, $B = \rho(h)$

$C = \rho(gh) = AB$

$B^T A^T = C^T$

$M \in Hom\,(\overset{\rho_1}{V_1}, \overset{\rho_2}{V_2}) = V_1^* \otimes V_2$

$\rho(g) M\,(v_1) := \rho_2(g^{-1}) M \rho_1(g) v_1$

Сплетающие операторы - это неподвижные отн. такого действия

$\rho(g) M = M \;\; \forall g$

$\rho_2(g) M = M \rho_1(g)$

$M = \rho_2(g^{-1}) M \rho_1(g)$

Как строить сплетающие операторы?

<u>Усреднение</u>: берем любой $M \rightsquigarrow \overline{M} := \frac{1}{|G|} \sum\limits_{g \in G} \rho(g) M$

<u>Следствие леммы Шура</u>:

а) если V_1, V_2 - разные неприводимые представления, а M - любой оператор из V_1, V_2, то

$\overline{M} = 0$

б) если же $V_1 \overset{V}{=} V_2$, то $\overline{M} = \lambda Id$, $\lambda = \frac{Tr M}{dim V}$

Д-во: а) V

б) по определению, т.к. след сопряжённых операторов одинаков,

$$\operatorname{Tr}\overline{M} = \operatorname{Tr} M$$

$$\overset{\|}{\dim V}\cdot\lambda \quad \Rightarrow \lambda = \frac{\operatorname{Tr} M}{\dim V}$$

Соотношение ортогональности для матричных элементов

M, $\rho_1(g)$, $\rho_2(g^{-1})$ всё запишем как матрицу

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\sum_{b,c}\rho_2(g^{-1})_{ab}\,M_{bc}\,\rho_1(g)_{cd} = \overline{M}_{ad}$$

$$1 \le a, b \le \dim V_2$$

а) $\overline{M}_{ad} \equiv 0$ надо это воспринимать как линейную форму от $\{M_{bc}\}$, у которой все коэффициенты равны 0.

т.е. $\sum\limits_{g\in G}\rho_2(g^{-1})_{ab}\,\rho_1(g)_{cd} = 0$

Последний унитарный трюк: можно ввести инвариантное эрмитово ск. произведение на $V_1, V_2 \Rightarrow \rho_2(g^{-1}) = [\rho_2(g)]^{-1}$

$\rho_1(g), \rho_2(g)$ – унитарные матрицы

$$\rho_2(g^{-1})_{ab} = \overline{\rho_2(g)_{ba}}$$

$$\sum_{g\in G}\overline{\rho_2(g)_{ba}}\,\rho_1(g)_{cd} = 0$$

т.е. $\forall$ матричный элемент $\langle {}_{cd}\rho_1, {}_{ba}\rho_2\rangle = 0$.

ρ_1 и $\forall$ матр. элем. ортогональны

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

В частности, $\langle \chi_1, \chi_2\rangle = 0$

$$\begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13}\\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23}\\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33}\end{bmatrix} \text{ – ф-я от } g.$$