Модуль IV Лекция 1

Представления конечных групп

Задача 1 Доказать линейную независимость

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}, \sqrt{15}, \sqrt{30}.$$
$$x_1, x_2, \dots, x_8$$

Решение: поле $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \dots, \sqrt{30})$

$\deg(K : \mathbb{Q}) \le 8$ K-векторное пространство над $\mathbb{Q}$

$\alpha \in K \rightsquigarrow \alpha \in \overset{\mathrm{Hom}(K,K)}{\mathrm{End}(K)} \Rightarrow \mathrm{Tr}\,\alpha \in \mathbb{Q}$

$$x \to \alpha x$$

$x, y \in K$

$\underset{\|}{\mathrm{Tr}}\,(\overset{\alpha}{\overset{\|}{xy}}) \in \mathbb{Q}$

$\langle x, y \rangle$ – симметричная билинейная форма на K

Вычислим матрицу $\langle x_i, x_j \rangle$

$\langle x_1, x_1 \rangle = \mathrm{Tr}\, 1 = \dim_{\mathbb{Q}} K = \deg$

$\langle x_2, x_2 \rangle = \mathrm{Tr}\, 2 = 2\dim_{\mathbb{Q}} K = 2\deg$

$\langle x_1, x_2 \rangle = \mathrm{Tr}\sqrt{2}$

(К примеру, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $e_1 = 1$ $e_2 = \sqrt{2}$

$$\begin{array}{cc} e_1 = 1 & \multirow{2}{*}{$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$} \\ e_2 = \sqrt{2} & \end{array} \quad \mathrm{Tr}(\sqrt{2}) = 0$$
)

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset K \Rightarrow \mathrm{Tr}\, K = 0$

$\circlearrowright_{\sqrt{2}} \quad \circlearrowright_{\sqrt{2}}$

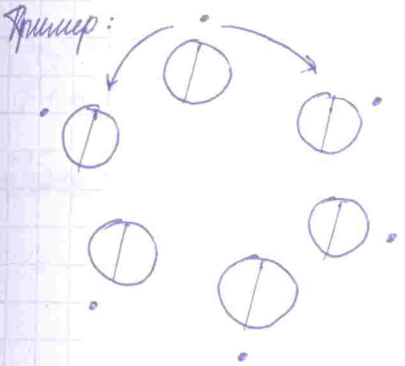
Определение: Представление группы G в векторном пространстве V над полем K называется гомоморфизм

$$\rho : G \longrightarrow \underset{\overset{\|}{\mathrm{Aut}_K(V)}}{GL(V)}$$

$\forall g \in G \Rightarrow \rho(g)$ – линейный оператор на V

$\rho(e) = Id$, $\rho(gh) = \rho(g)\rho(h)$, $\rho(g^{-1}) = [\rho(g)]^{-1}$

Пример:



Оператор L перекладывания каши

V = пространство с базисом из тарелок $e_1, \dots, e_n$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ & \frac{1}{2} & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$L^{100} \overset{?}{\approx} Id$

$\Downarrow$ проектор на $(1, 1, \dots 1)$.

Ищем собственные векторы и собственные значения

$(1, \dots, 1) = v_1$, $Lv_1 = v_1$

иногда

$v_2 = (1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$ когда n - четно, $Lv_2 = -v_2$

$v_3 = (1, i, -1, -i, 1, i, -1, -i)$ $Lv_3 = 0$.

$w_1 = (1, \xi, \xi^2, \xi^3, \dots, \xi^{n-1})$, $\xi = e^{\frac{2\pi i}{2}}$

$Lw_2 = \lambda_1 w_1$

$\lambda_1 = \frac{\xi + \xi^{-1}}{2}$ $|\lambda_1| < 1$

$w_0 = (1, 1, \dots, 1)$

$w_2 = (1, \xi^2, \xi^4, \dots, \xi^{2n-2})$

$\lambda_2 = Re(\xi^2) = \cos\left(\frac{4\pi}{n}\right)$

$w_j = (1, \xi^i, \xi^{2i}, \dots, \xi^{(n-1)i})$

$\lambda_j = \cos\left(\frac{2\pi j}{n}\right)$

$w_{n-1} = \overline{w_1} = (1, \xi^{-1}, \xi^{-2}, \dots, \xi^{1-n})$

$\lambda_{n-1} = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

все $|\lambda| < 1$, кроме λ_0, $\lambda_{n/2}$

V - векторное пространство, которое нас интересует,
в нашей задаче есть симметрия (повороты стола) -
- это группа симметрий G действует на V

$G = \langle 1, \zeta, \dots, \zeta^{n-1} \rangle = \{ \sqrt[n]{1} \}$

$L = \frac{1}{2} [\rho(\zeta) + \rho(\zeta^{-1})]$

Упрощаем действие G (диагонализируем) и решаем задачу

Исторически теорию представлений придумал Фробениус ~ 110 лет назад

Теорема Дирихле: в $\forall$ арифм. прогрессии есть ∞ много простых чисел

Теория представлений - это линеаризация науки о симметриях

Пример: G действует на (конечном) множестве X

$\pi : G \to \mathrm{Aut}\, X$

$V = \mathbb{C}[X]$ - функции на X

$\rho(g) f(x) := f(\pi(g^{-1}) x)$

$\rho(g_1 g_2) = \rho(g_1) \rho(g_2)$

$f(\pi(g_1, g_2)^{-1} x)$

$f'(x)$

$f(\pi(g_2) x)$

$f'(\pi(g_1) x) = f(\pi(g_2) \pi(g_1) x)$

$f(\pi(g_2^{-1} g_1^{-1}) x) \to$ сходятся

Пример: группа G действует на себе левыми сдвигами

$\pi(g)(h) = gh \Rightarrow$ линеаризация $\rho : G \to \mathrm{Aut}(\mathbb{C}[G])$

регулярное представление

Подпредставление: $\rho : G \to \mathrm{Aut}\, V$, $V \supset W$

Пример: регулярное представление $\rho(g) W \subset W \quad \forall g$

$V = \mathbb{C}[G] \supset W =$ все постоянные функции

Определение: V-неприводимо, если у него нет подпредставлений (кроме 0 и V)
$\forall$ 1-мерное

Пример: $G = S_3$ = симметрии Δ-ка

$\pi: S_3 \to \mathrm{Aut}(\because)$

$\rho: S_3 \to GL(\mathbb{C}^3)$

$(\rho, V) \supset (\rho, W)$, W-постоянная функция

W'-другое подпространство, состоящее из функций у которых сумма значений $=0$

W'-неприводимое 2-мерное представление S_3

Определение: ρ, V - представление G

χ - характер $\chi_\rho(g) := \mathrm{Tr}\, \rho(g)$

$G = S_3$, ρ, W'-двумерное представление

$\chi_{\rho'}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = 2$

$\mathbb{C}^3 = W \oplus \mathbb{C}\, \xi$.

$\chi_{\rho'}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix} = 0$

$\chi_\rho(h) = \chi_\rho(ghg^{-1})$

$\chi_{\rho'}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix} = 0$

$\chi_{\rho'}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = 0$

$\chi_{\rho'}\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} = -1$

$\chi_{\rho'}\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = -1$