Лекция №6

Решение уравнений в радикалах

Формулы Кардано и Феррари.

$S_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\quad x^2+bx+c$, $\sqrt{D} = \sqrt{b^2-4c}$

$S_3 = \{(123), (132), e\} = A_3 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ - нормальная подгруппа

$(123) = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$, $(132) = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$ $\qquad S_3/A_3 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$\{e\} \overset{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}{\subset} A_3 \overset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\subset} S_3$

$S_4 \overset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\supset} A_4 \overset{\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}{\supset} K_4 \overset{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}{\supset} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \supset \{e\}$

$K_4 = \{e, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$

Проверим, что K_4 - группа (замкнута относительно умножения $(12)(34)(13)(24) = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&3&2&1\end{pmatrix} = (14)(23)$) Нормальность $\Leftarrow$ при сопряжении цикловой тип сохраняется

$K_4 \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $\qquad deg = 3$

$x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$

$x \rightsquigarrow x - c$ можно избавиться от a_1

$x^3 + px + q = 0$

$p, q \in L$

Минимальное поле разложения P над L - это K.

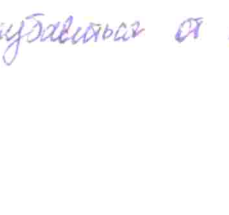
$Gal(K:L) = S_3 \supset A_3$

Теория Галуа $\Rightarrow$

$L \subset K_2 \subset K_6$

K_2 = поле инвариантов A^3

Заранее включим в L: $\sqrt[3]{1}$, $\rho = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}$



$\rho^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}$

$K_2 = L(\sqrt{?})$

Дискриминант $\mathcal{D} = \prod_{1 \le i \ne j \le n} (x_i - x_j) = \pm \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2$

$\sqrt{\mathcal{D}} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)$ - при перестановке корней умножается на $(-)^{\text{sgn}\,\varepsilon}$

$\Downarrow$

Инвариантна относит. A_2 (но не инвариантна относительно других перестановок)

$\sqrt{\mathcal{D}} = (x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_1 - x_3) = (x_1 x_2 - x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3)(x_1 - x_3) =$

$= x_1^2 x_2 - \cancel{x_1 x_2 x_3} - x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2^2 - x_2^2 x_3 + \cancel{x_1 x_2 x_3} - x_2 x_3^2$

$\Downarrow$

$K_2 = L(\sqrt{\mathcal{D}})$

Далее, $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ $(a_2 = 0)$

$$\left.\begin{aligned} &R_{\rho}(x_1) = x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3 \\ &R_3(\alpha) = \alpha + \zeta\sigma(\alpha) + \zeta^2 \sigma^2(\alpha) + \ldots \\ &R_{\rho^2}(x_1) = x_1 + \rho^2 x_2 + \rho x_3 \end{aligned}\right\} (*)$$

$R_\rho^3(x_1) = (x_1 + \rho x_2 + \rho^2 x_3)^3 = (x_1 + \rho x_2)^3 + 3(x_1 + \rho x_2)^2 \rho^2 x_3 + 3(x_1 + \rho x_2)(\rho^2 x_3)^2 +$
$+ (\rho^2 x_3)^3 = \underline{x_1^3} + \underline{3x_1^2 \rho x_2} + 3x_1 \rho^2 x_2^2 + \underline{\rho^3 x_2^3} + 3(x_1^2 + 2x_1 x_2 \rho + \rho^2 x_2^2)\rho^2 x_3 +$

$+ 3x_1 \rho^4 x_3^2 + 3\rho x_2 \rho^4 x_3^2 + \underline{\rho^6 x_3^3} = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 3\rho(x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1) +$

$+ 3\rho^2 (x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2) + 6x_1 x_2 x_3 =$

$= x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - \frac{3}{2} \sum_{\sigma} x_1^2 x_2 + 6x_1 x_2 x_3 + \frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{\mathcal{D}} = -\frac{27}{2} q + \frac{3}{2}\sqrt{-3}\underbrace{\sqrt{\mathcal{D}}}_{\in K_2}$

$\mathcal{D} = -4p^3 - 27q^2$

$R_{\rho^2}(x_1)^3 = -\frac{27}{3} q - \frac{3}{2}\sqrt{-3}\sqrt{\mathcal{D}}$

$R_\rho(x_1) \cdot R_{\rho^2}(x_1) = -3p$ Надо выбирать пары кубических так, чтобы

Решая систему уравнений $(*)$ - линейной, получим

$3x_1 = R_\rho(x_1) + R_{\rho^2}(x_1)$

$3x_2 = \rho^2 R_\rho(x_1) + \rho R_\rho(x_1)$

$3x_3 = \rho R_\rho(x_1) + \rho^2 R_{\rho^2}(x_1)$

$\deg = 4$

$x^4 + px^2 + qx + r = 0$ – Сдвигом сводим общее к частному

$$L \subset K_2 \subset K_6 \subset K_{12} \subset K_{24} = K$$
$$K_2 = K^{A_4}, \quad K_6 = K^{K_4}$$

$$K_2 = L(\sqrt{D})$$

$$D = 16p^4 r - 4p^3 q^2 - 128 p^2 r^2 + 144 p q^2 r - 27 q^4 + 256 r^3$$

Важное замечание:

конкретное уравнение кубическое неразложимое $\mathrm{Gal} = \begin{cases} S_3 \to \text{если } \sqrt{D} \notin L \\ \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \to \text{если } \sqrt{D} \in L \end{cases}$

Мы ищем примитивный элемент K_6 над K_2, т.е. функцию от корней x_1, x_2, x_3, x_4, которая инвариантна относительно группы Клейна

$$\theta_1 = (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$
$$\theta_2 = (x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$$
$$\theta_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$$

Эти $\theta_{1,2,3}$ являются корнями кубического многочлена с коэффициентами

$\theta^3 - b_1\theta^2 + b_2\theta - b_3 = 0$. – Кубическая резольвента исходного ур-я

$$b_1 = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 2p$$
$$b_2 = \ldots \quad p^2 - 4r$$
$$b_3 = -q^2$$

$$\theta^3 - 2p\theta^2 + (p^2 - 4r)\theta + q^2 = 0$$
$$\downarrow$$

Решаем методом Кардано

$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) = \theta_1$$
$$(x_2 + x_1) + (x_2 + x_4) = 0$$
$$x_1 + x_2 = \sqrt{-\theta_1}$$
$$x_3 + x_4 = -\sqrt{-\theta_1}$$
$$x_1 + x_3 = \sqrt{-\theta_2}$$
$$x_2 + x_4 = -\sqrt{-\theta_2}$$
$$x_1 + x_4 = \sqrt{-\theta_3}$$
$$x_2 + x_3 = -\sqrt{-\theta_3}$$

$\sqrt{-\theta_1}\sqrt{-\theta_2}\sqrt{-\theta_3} = (x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_1+x_4) = \sum_i \frac{x_1x_2x_3x_4}{x_i} = -q$

$2x_1 = \sqrt{-\theta_1} + \sqrt{-\theta_2} + \sqrt{-\theta_3}$

$2x_2 = \sqrt{-\theta_1} - \sqrt{-\theta_2} - \sqrt{-\theta_3}$

$2x_3 = -\sqrt{-\theta_1} + \sqrt{-\theta_2} - \sqrt{-\theta_3}$

$2x_4 = -\sqrt{-\theta_1} - \sqrt{-\theta_2} + \sqrt{-\theta_3}$