Лекция 6. [16.12.09].



## <u>Некоторые замечания про тензорные произведения</u>

Напомним фундаментальное свойство тенз. произведения

Если есть билинейное отображение $U\times V \longrightarrow W$,

то оно "проскакивает через" $U\otimes V$:

$$\begin{tikzcd} U\times V \arrow[r] \arrow[dr] & W \\ & U\otimes V \arrow[u, dashed] \end{tikzcd}$$

и это устанавливает изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{polylin}(U; V; W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(U\otimes V, W)$$

(Аналогичное свойство верно для большего числа пространств.)

<u>Применение</u>

Это свойство удобно использовать в некоторых доказательствах.

<u>Задача</u>: ~~Построить~~ естественное отображение

$$V^*\otimes V^*\otimes V^* \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}_{polylin}(V.V.V; k)}_{\| \atop W}$$

<u>Реш</u>. Заметим, что можно взять $W$ и

начать с построения полилинейного отображения

$$V^*\times V^*\times V^* \longrightarrow W = \mathrm{Hom}_{polylin}(V.V.V; k)$$

$$(l_1, l_2, l_3) \longmapsto l_1(x_1)\cdot l_2(x_2)\cdot l_3(x_3)$$

естественно отобразить тройку линейных функций в полилинейную функцию от $3^х$ аргументов = их произведению!

⟨Полилинейность — очевидна⟩

Значит: <u>есть линейное</u> отображение (по фунд. свойству)

$$V^* \otimes V^* \otimes V^* \longrightarrow \mathrm{Hom}_{polylin}(V.V.V; k)$$

которое переводит

$$l_1 \otimes l_2 \otimes l_3 \longmapsto l_1(x_1)\cdot l_2(x_2)\cdot l_3(x_3)$$

любой разложимый тензор — как функцию от трех аргументов!

Если $V$ - конечномерно, то легко заметить, что базис $V^* \otimes V^* \otimes V^*$ переходит в базис простр. пол. лин. ф. и мы получим изоморфизм.

Подчеркну — существование линейного отобр. получается сразу (просто) из Функц. свойства.

Замечание: Связь между тенз. произведением и прямыми суммами.

Предл.: Пусть $e_1, \dots, e_k$ базис $U$. Тогда

$$U \otimes V \simeq e_1 \otimes V \dotplus e_2 \otimes V \dotplus \dots \dotplus e_k \otimes V \simeq V^k$$

кратная прямая сумма

Действительно: В определении $\otimes$ как билинейного отображения со свойствами есть

$2^e$. свойство: Любой вектор $z \in U \otimes V$ представляется единственным образом в виде

$$z = \sum_{i=1,\dots,k} e_i \otimes y_i \quad , \text{где } y_i \in V \text{ и набор } \{y_i\}$$

однозн. определен по $z$.

Заметим $e_i \otimes V$ - подпространство в $U \otimes V$!, а $2^e$. свойство означает прямую сумму.

Применение: Пусть $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, а $\Lambda = \mathbb{C}$

В $\mathbb{C}$ есть базис $1, i$. Получаем

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V = 1 \otimes V \dotplus i \otimes V$$ — прямая сумма!

Заметим, что можно определить в $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ умножение на числа из $\mathbb{C}$:

$$(a+bi)(1\otimes v_1 + i \otimes v_2) = 1\otimes a v_1 + i \otimes b v_1 + i \otimes a v_2 + 1 \otimes (-b v_2)$$

или $(a+bi)(v_1; v_2) = (a v_1 - b v_2; b v_1 + a v_2)$ —

— как и делается при комплексификации!

Можно сказать по-другому:

$\forall z \in \mathbb{C}$ умножение на $z$ в $\mathbb{C}$ — $\mathbb{R}$-линейный оператор

тогда $(\text{умн. на } z) \otimes \mathbb{1}$ — $\mathbb{R}$ линейный оператор в $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$

действующий на разлож. элементах

$$w \otimes v \longmapsto (zw) \otimes v. \qquad w \in \mathbb{C},\ v \in V$$

---

Ещё о кососимметрических тензорах:

Важное определение: Пусть даны $v_1, \dots, v_m \in V$

положим $v_1 \wedge \dots \wedge v_m := \underset{\text{кососимметризация (альтернирование)}}{A}(v_1 \otimes \dots \otimes v_m) \in ST^m(V)$

<u>Пример:</u> $v_1 \wedge v_2 = A\,(v_1 \otimes v_2) = \frac{1}{2}\left(v_1 \otimes v_2 - v_2 \otimes v_1\right)$

<u>Свойства:</u>

(1) $v \wedge v = 0$ — сразу ясно

$v_1 \wedge v_2 = - v_2 \wedge v_1$ — сразу ясно.

(2) $v_1 \wedge \ldots \wedge v_m$ — полилинейно по каждому аргументу.

То есть.

$$v_1 \wedge \ldots \wedge (\alpha v_i' + \beta v_i'') \wedge \ldots v_m = \alpha\,(v_1 \wedge \ldots \wedge v_i' \wedge \ldots v_m) + \beta\,(v_1 \wedge \ldots \wedge v_i'' \wedge \ldots v_m)$$

Достаточно вспомнить, что такое верно для $\otimes$ и $A$ — лин. отобр.

$$v_1 \otimes \ldots \otimes (\alpha v_i' + \beta v_i'') \otimes \ldots v_m = \alpha\,(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i' \otimes \ldots v_m) + \beta\,(v_1 \otimes \ldots \otimes v_i'' \otimes \ldots v_m) .$$

(3) Если два соседних вектора совпадают, $v_i = v_{i+1}$, то $v_1 \wedge \ldots \wedge v_m = 0$.

Заметим $\bigwedge_j v_j = A\left(\bigotimes_j v_j\right) = \frac{1}{m!}\left(\sum_{\pi \in A_m} \pi\left(\bigotimes_j v_j\right) - \sum \pi(i,i+1)\left(\bigotimes_j v_j\right)\right) = 0$

$(i,i+1)$ — сохраняет $\bigotimes_j v_j$, поэтому суммы сокращаются!

(4) <u>Следствие:</u> при перестановке сомножителей, внеш. произв. умножается на знак. перестановки.

$$\bigwedge_j v_{\pi^{-1}(j)} = \varepsilon(\pi) \cdot \bigwedge_j v_j$$

<u>Док:</u> мы знаем, что перестановки соседних элементов порождают всю группу $S_m$.

<u>Итог</u>: $\boxed{\begin{array}{l}\text{вн. произведение векторов — кососимметрическая полилинейная функция этих векторов.}\\ (v_1, \ldots, v_m) \longmapsto v_1 \wedge \ldots \wedge v_m .\end{array}}$

Приложение:

Предл 1: Пусть $e_1, \dots, e_n$ базис $V$, тогда

$B := \{ e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \mid 1 \le i_1 < i_2 \dots < i_m \le n \}$ образуют базис $\Lambda T^m(V)$

Док: Заметим, что в разные произведения входят с ненулевыми коэффициентами разные подмножества тензорного базиса $\{ e_{s_1} \otimes \dots \otimes e_{s_m} \}$, поэтому система $B$ линейно независима. Однако

$$\# B = \dim \Lambda T^m(V)$$ — поэтому базис $\bullet$

Предл: $v_1 \wedge \dots \wedge v_m = 0 \iff$ вектора $\{v_i\}$ — лин. зависимы.

Док: Это — как свойство определителя, который есть кососимметрическая полилинейная функция строк.

(⇒) $\{v_i\}$ - зависимы $\Rightarrow \bigwedge_i v_i = 0$

Можно переставлять вектора — равенство или неравенство нулю остается!

Поэтому: можно считать, что последний вектор выражается $v_m = \sum_{i=1,\dots,m-1} \alpha_j v_j$

Тогда по линейности (относительно последнего вектора)

$$\Lambda v_i = \sum \alpha_j \left( v_1 \wedge \dots \wedge v_{m-1} \wedge v_j \right)$$

в каждом произведении есть пара равных векторов, тогда, из кососимметр, оно $= 0$.

$\bullet$

(8) Пусть $v_1 \dots v_m$ — лин. независимы — дополним их до базиса $V$.

Тогда $v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ — элемент базиса $\Lambda T^m V \Rightarrow$ не равен $0$!

Предл.: Если $\langle v_1 \dots v_m \rangle = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$ — системы линейно независимы и их линейные оболочки совпадают, то

$$\wedge v_i = \alpha \cdot \wedge u_i \qquad \text{для } \alpha \in \mathbb{k}^* = \mathbb{k} \setminus 0.$$

Более точный факт:

Лемма: Если строка $(u_1 \dots u_m) = (v_1 \dots v_m) \cdot C$ то

$$(\wedge u_i) = \det C \cdot (\wedge v_i)$$

(Замеч.: можно писать столбцы векторов и матрицу слева — свойство то же)

Действительно $u_i = \sum c_{ri} \cdot v_r$

$$\wedge u_i = \sum c_{r_1 1} \cdots c_{r_m m} \, v_{r_1} \wedge \dots \wedge v_{r_m} =$$

однако $(r_1 \dots r_m) = \pi(1, \dots, m)$ — перестановки $(1, \dots, m)$

$$= \left( \sum_{\pi} \varepsilon(\pi) \, c_{\pi(1)\cdot 1} \cdots c_{\pi(m)\cdot m} \right) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_m =$$

$$= (\det C) \, v_1 \wedge \dots \wedge v_m.$$

Теперь — обе сист. лин. незав $\Rightarrow (\det C) \neq 0$.

Теперь если мы сменим базис в каждом подпространстве

$$M := \langle v_1 \dots v_m \rangle \quad , N := \langle u_1 \dots u_m \rangle \quad \text{то}$$

вн. произведения умножатся на числа $\neq 0$, будут пропорционально наличии первоначальным тензорам.

Лемма: Если $M \neq N$, то $\wedge v_i$ не пропорц. $\wedge u_i$

Док. Перейдем к другим базисам в $M$ и в $N$:

Сначала берем $e_1 \dots e_k$ базис $M \cap N$

затем его можно дополнить $e_1 \dots e_k\, e_{k+1} \dots e_m$ до базиса $M$

и $e_1 \dots e_k\, e_{m+1} \dots e_{2m-k}$ до базиса $N$, и далее до базиса $V$.

Ясно что $e_1 \wedge \dots \wedge e_k \wedge e_{k+1} \wedge \dots \wedge e_m$ и

$e_1 \wedge \dots \wedge e_k \wedge e_{m+1} \wedge \dots \wedge e_{2m-k}$ — разные

элементы базиса $\{ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} \mid i_1 < i_2 < \dots < i_m \}$

всего пространства $\Lambda T^m(V)$, значит

они не пропорциональны. Значит не пропорциональны

и первоначальные $\wedge v_i$, и $\wedge u_i$ ■

Тем самым мы сопоставляем подпространствам размерности $m$ в $V$ точки проективного пространства $P(W)$

где $W = \Lambda T^m(V)$

Получаются не все точки, а некоторое подмногообразие $Gr(m, V)$.
назыв. грассманово многообразие.

На самом деле можно определить внешнее умножение не только векторов, а любых кососимметр. тензоров: (это - очень полезное умножение!)

**Опр:** Пусть $p \in \Lambda T^r(V)$, $q \in \Lambda T^s(V)$ - кососимм. тензоры.

Тогда $p \wedge q := A(p \otimes q)$, где $p \otimes q$ есть естественное умножение тензоров "снятие скобок":

$$(v_1 \otimes \dots \otimes v_r) \otimes (v_{r+1} \otimes \dots \otimes v_{r+s}) = v_1 \otimes \dots \otimes v_r \otimes \dots v_{r+s}.$$

**Теорема** Внешнее умножение кососимм. тензоров ассоциативно!

**Док:** рассм. ещё $t \in \Lambda T^m(V)$

Имеем $(p \wedge q) \wedge t = A\big(A(p \otimes q) \otimes t\big)$

**Лемма:** $A(p \otimes q \otimes t) = A\big(A(p \otimes q) \otimes t\big)$

Пусть $N = r+s+m$, $G = S_N$ и $H = S_{r+s}$ - подгруппа перестановок первых $r+s$ позиций.

Запишем $G = \sqcup g_k H$

$$A(p \otimes q \otimes t) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \varepsilon(g)\, g(p \otimes q \otimes t) = \frac{1}{|G|} \cdot \sum_k \varepsilon(g_k) g_k \Big( \sum_{h \in H} \varepsilon(h) h (p \otimes q) \otimes t \Big) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_k \varepsilon(g_k) g_k \Big( \Big( \sum_{h \in H} \varepsilon(h) h (p \otimes q) \Big) \otimes t \Big) = \frac{|H|}{|G|} \cdot \sum \varepsilon(g_k) g_k \cdot \big(A(p \otimes q) \otimes t\big) =$$

$$= \frac{1}{|G|} \cdot \sum_{k,h} \varepsilon(g_k \cdot h) \cdot (g_k h) \big(A(p \otimes q) \otimes t\big) = A\big(A(p \otimes q) \otimes t\big) \quad \blacksquare$$

Аналогично $A(p \otimes q \otimes t) = A\big(p \otimes A(q \otimes t)\big)$ $\blacksquare$