Лекция 5 [9.12.09]

Итак - мы изучаем кратные тензорные произведения: 2^x, 3^x и более множителей.

Аналогично случаю 3^x: если есть m множителей то определено $\forall \pi \in S_m$ отображение перестановки

$$\pi : U_1 \otimes \dots \otimes U_m \longrightarrow U_{\pi^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes U_{\pi^{-1}(m)}$$

$$u_1 \otimes \dots \otimes u_m \longmapsto \bigotimes (u_i \text{ на месте } \pi(i)) = u_{\pi^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes u_{\pi^{-1}(m)}$$

<u>Опр:</u> тензор $t \in V^{\otimes m}$ называют симметр, если

$$\forall \pi \in S_m \ : \ \pi(t) = t$$

– кососимметрическим, если $\forall \pi \ \cdot \ \pi(t) = \epsilon(\pi) \cdot t$

$\epsilon(\pi) = \pm 1$ – знак π.

<u>Обозначения.</u> $ST^m(V)$ – подпростр симм тензоров в $V^{\otimes m}$

$\Lambda T^m(V)$ – подпростр косо симм. тензоров в $V^{\otimes m}$

<u>Предл.</u> Если t задан своими координатами

$$t = \sum_{(i_1, \dots, i_m) \text{- всевозм наборы}} t^{(i_1 \dots i_m)} e_{i_1} \otimes e_{i_2} \dots \otimes e_{i_m}, \quad \text{то}$$

$$t \text{ - симм} \iff \forall \pi \ : \ t^{(i_1 \dots i_m)} = t^{(i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(m)})}$$

– коорд не меняются при перест. индексов

$$t \text{ - кососимм} \iff \forall \pi \ : \ t^{(i_1 \dots i_m)} = \epsilon(\pi)\, t^{(i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(m)})}$$

– коор умн на знак при перест. индекс.

Док. — аналогично случаю $n=3$

Утв: Пусть $\dim V = n$. Тогда

(1) $\dim ST^m(V) = \binom{n+m-1}{m}$

(2) $\dim \Lambda T^m(V) = \binom{n}{m}$

Док: (1) — набор не зависит от порядка индексов $\Rightarrow$

$\dim$ = числу наборов $1 \le i_1 \le \dots \le i_m \le n$

$\parallel$

числу наборов $1 \le i_1 < i_2+1 < i_3+2 < \dots < i_m+m-1 \le n+m-1$

(два равенства — остальные строго меньше)

$\parallel$

$\binom{n+m-1}{m}$

(2) $\dim$ = числу наборов $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m = n$

$\parallel$

$\binom{n}{m}$

Пример: $m=2$ $\quad \frac{n(n+1)}{2}$ и $\frac{n(n-1)}{2}$ $\quad \Sigma = n^2$

$m=3$ $\quad \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ и $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ $\quad \Sigma < n^3$ (при $n>1$)

Разложения в прямые суммы:

Теория из лин. алг.

Опр: $P: V \to V$ наз проектором, если $P^2 = P$

Предл: Тогда $V = \operatorname{Im} P \dotplus \operatorname{Im}(E-P)$

Док: $E = P + (E-P) \Rightarrow x = Px + (E-P)x$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{Im} P + \operatorname{Im}(E-P) = V.$$

Почему прямая? Пусть $x = Py = (E-P)z \in (\operatorname{Im} P) \cap (\operatorname{Im}(E-P))$

Тогда $Px = P^2 y = P(E-P)z = (P-P^2)z = 0 \cdot z = 0$

$$P^2y = Py = x$$

откуда $x = 0 \Rightarrow$ сумма прямая □

Пусть $\operatorname{char} \Bbbk = 0$

Приложения: определим оператор симметризации по S_m

$$C(t) := \frac{1}{m!}\sum_{\pi \in S_m} \pi(t), \quad t \in V^{\otimes m}$$

Утв.(1) $u = C(t)$ — симметрич тензор.

Док: $\rho \in S_m$. Тогда $\rho(u) = \frac{1}{m!}\sum_{\pi} \rho(\pi(t)) = \frac{1}{m!}\sum (\rho\pi)(t) = C(t) = u$

π — пробегает S_m

$\Updownarrow$

$\rho\pi$ — пробегает S_m

Утв.(2) $C^2 = C$. т.е C — проектор (фактически доказываем: $u \in ST^m(V) \Rightarrow C(u) = u$)

Действ $C(t) = u \Rightarrow C^2(t) = \boxed{C(u) = \frac{1}{m!}\sum_{\rho \in S_m} \rho(u) = \frac{1}{m!}\underbrace{\sum u}_{m! \text{ раз}} = u}$

Следствие Имеет место разложение:

$$V^{\otimes m} = ST^m(V) \dotplus \operatorname{Im}(E-C)\Big|_{V^{\otimes m}}$$

Замечание: $\operatorname{Im}(E-C) = \ker C$ – для любого проектора.
(док. сами!)

— * — * — * —

Аналогично можно определить оператор кососимметризации или альтернирования

$$A(t) := \frac{1}{m!} \sum_{\pi \in S_m} \varepsilon(\pi) \cdot \pi(t), \quad t \in V^{\otimes m}$$

Утв (3): $r = A(t)$ – кососимм. тензор.

Док: $$\rho(r) = \frac{1}{m!} \sum \rho\, \pi(t) \cdot \varepsilon(\pi) \cdot \varepsilon(\rho) \cdot \varepsilon(\rho) =$$

$$= \frac{1}{m!} \cdot \varepsilon(\rho) \cdot \sum \varepsilon(\rho\pi) \cdot (\rho\pi)(t) = \varepsilon(\rho) \cdot A(t) = \varepsilon(\rho) \cdot r \quad \blacksquare$$

Утв. (4) $A^2 = A$ т.е A – проектор.

Пусть $A(t) = r$ $\quad A^2(t) = A(r) = \frac{1}{m!} \sum \varepsilon(\rho) \cdot \rho(r) =$

$$= \frac{1}{m!} \sum \underbrace{\varepsilon(\rho) \cdot \varepsilon(\rho)}_{= 1} r = r = A(t) \quad \blacksquare$$

Фактически доказываем:
$r \in \Lambda T^m(V) \Rightarrow A(r) = r$

Следствие: $$V^{\otimes m} = \underbrace{\operatorname{Im} A}_{= \Lambda T^m(V)} \dotplus \operatorname{Im}(E-A)$$

Утв (5) $AC = CA = 0$.

Док: $AC(t) = A(u)$ где u – симметр.

$$A(u) = \frac{1}{m!} \sum \varepsilon(\pi) \cdot \pi(u) = \frac{1}{m!}\left(\sum_{\substack{\pi \\ \text{четн}}} \pi - \sum_{\pi \text{ нечет}} \pi\right) = 0$$

$C(r)$, где r – кососимм, считается аналогично!

Следствие: Есть разложение в прямую сумму.

$$V^{\otimes m} = \operatorname{Im} A \dotplus \operatorname{Im} C \dotplus \operatorname{Im}(E-A)(E-C)$$

Док: $(E-A)(E-C) = E - A - C + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{AC}$

$\Rightarrow E = A + C + (E-A)(E-C)$ откуда сумма

прямая? $\operatorname{Im} A \cap (\operatorname{Im} C + \operatorname{Im}(E-A)(E-C)) = 0$

$$x = Ay = Cz + (E-A)(E-C)v$$

$$Ax = A^2 y = ACz + (A - A^2)(E-C)v$$

$A^2y = Ay = x$, $ACz = 0$, $(A-A^2)(E-C)v = 0$ $\Rightarrow$ $x = 0$

Другие пересечения – аналогично!

– Это так называемые перестановочные проекторы!

Для $V^{\otimes 3} = ST^3(V) \dotplus \Lambda T^3(V) \dotplus M(V)$

$$M(V) = (E-C)(E-A)V^{\otimes 3}.$$

$n=3$

$$27 = \underbrace{\frac{3\cdot4\cdot5}{6}}_{=10} + \underbrace{\frac{3\cdot2\cdot1}{6}}_{=1} + \underbrace{?}_{=16}$$

<u>Типы симметрий тензоров:</u>

Может ли быть тензор частично симм и частично кососимм?

Например: $\{t \in V^{\otimes 3} \mid (12)t = t \;;\; (23)t = -t\} = U$

Ясно что U подпростр в $V^{\otimes 3}$. <u>$\dim U = ?$</u>

<u>Предл.</u> $\dim U = 0$, т.е $U = 0$ — <u>Нет (ненулевых) таких тензоров!</u>

<u>Док:</u> Заметим, что (12) и (23) образующие S_3

$\Rightarrow \forall \pi \in S_3 : \pi(t) = \pm t$ (в зависимости от разложения π на (12) и (23))

<u>Обобщим:</u> Пусть $t^{\neq 0}$ таково, что

Усл: $\forall \pi \in S_n : \pi(t) = \lambda(\pi)\cdot t$. $(\lambda(\pi) \neq 0)$

<u>Тогда</u> либо $\lambda(\pi) = 1$ при всех π, либо $\lambda(\pi) = \pm 1 = $ знак π

Док. [1.] $\lambda : S_n \longrightarrow k^*$ гомоморфизм

Действ.: $(\rho\pi)\cdot t = \rho(\pi(t)) = \rho(\lambda(\pi)\cdot t) =$

$$(\rho\pi)\cdot t = \lambda(\rho\pi)t, \qquad \rho(\lambda(\pi)\cdot t) = \lambda(\pi)\cdot\rho(t) = \lambda(\pi)\cdot\lambda(\rho)\cdot t$$

$t \neq 0 \Rightarrow \lambda(\rho\pi) = \lambda(\rho)\cdot\lambda(\pi)$ — числа можно переставить.

[2]. $\lambda(ij) = \lambda(12)$ — значения для всех транспозиций одинаковы!

Мы знаем, что транспозиции сопряжены!: $\exists \rho : (ij) = \rho\cdot(12)\cdot\rho^{-1}$

$\Rightarrow \lambda(ij) = \lambda(\rho)\cdot\lambda(12)\cdot\lambda(\rho)^{-1} = \lambda(12)$ — числа перестановочны.

[3] $\lambda(12)^2 = 1 \Rightarrow \lambda(12) = \pm 1 \Rightarrow$ или все $\lambda(\pi) = +1$

или $\lambda(\pi) = (-1)^{\text{число транспозиций}} =$ знак π.

Задача: (число гомоморфизмов S_n в абелеву группу G) =

= (числу элементов 2-го порядка в G) + 1.

Следствие. ненулевого t: $(12)t = t$, $(23)t = -t$ не существует.

Определим: $R(t)$ для $t \in V^{\otimes 3}$

$$R(t) = \frac{1}{3}\left(t + (123)\,t + (123)^2\,t\right)$$

$R(a\otimes b\otimes c) = \frac{1}{3}(a\otimes b\otimes c + b\otimes c\otimes a + c\otimes a\otimes b)$ — вращ.-но кругу

Теор.: $V^{\otimes 3} = \{t : (12)t = t\} \dotplus \{t : (12)t = -t\}$ — очевидно (пересеч = 0 и разм.)

Утв.: (а) $\{t : (12)t = t\} = ST^3(V) \dotplus \{t : (12)t = t,\ R(t) = 0\}$ "полусимм."

(б) $\{t : (23)t = -t\} = \Lambda T^3(V) \dotplus \{t : (23)t = -t,\ R(t) = 0\}$ "полукосые"

Чтобы доказать вспомним:

$\forall$ P проектора: $P: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$

$$\mathcal{U} = \underset{\{t \in \mathcal{U} \mid P(t) = t\}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\, P}} \dotplus \underset{\{t \in \mathcal{U} \mid Pt = 0\}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\,(E - P)}}$$

<u>Действ.</u>: $t = P(t) \Rightarrow t \in \mathrm{Im}\, P$
$t = P(z) \Rightarrow P(t) = P^2(z) = P(z) = t$ – это первое равенство.

<u>Теперь</u>: $P(t) = 0 \Rightarrow t = (E-P)t \in \mathrm{Im}\,(E-P)$
$t = (E-P)z \Rightarrow P(t) = (P - P^2)z = (P-P)z = 0.$ – это второе равенство.

<u>Теперь пусть</u> $\mathcal{U} = \{t \in V^{\otimes 3} \mid (12)t = t\}$

Заметим что $C(t) = \frac{1}{2}\left(R(t) + R((12)t)\right)$

значит если $t \in \mathcal{U}$, то $C(t) = R(t)$

Очевидно, что $\mathrm{Im}\, C \subset \mathcal{U}$ значит. $C: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ сохраняет $\mathcal{U}$.

<u>Значит</u>: C – проектор на $\mathcal{U}$ ($\text{и } R$ – проектор на $\mathcal{U}$).

$$\Rightarrow \mathcal{U} = \underset{ST^3(V)}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\, C}} \dotplus \{t \in \mathcal{U} \mid C(t) = 0\}$$

$$\{t \in \mathcal{U} \mid C(t) = 0\} = \{t \in \mathcal{U} \mid R(t) = 0\} = \{t \in V^{\otimes 3} \mid t = (12)t,\ R(t) = 0\}. \blacksquare$$

Часть (б) доказывается <u>аналогично</u>. $\bullet$