Лекция 4 [2.12.09]

Итак, мы изучаем тензорные произведения

$$u \otimes v \in U \otimes V \quad \text{для любых } u \in U,\ v \in V$$

причем

$$(\alpha u_1 + \beta u_2) \otimes v = \alpha (u_1 \otimes v) + \beta (u_2 \otimes v) \quad \text{т.к.}$$

$(u, v) \longmapsto u \otimes v$ это билинейное отображение!

Аналогично по "второй букве"!

Можно ли написать $(\alpha u) \otimes v = u \otimes (\alpha v)$ – да!

Верно ли что любой элемент из $U \otimes V$ имеет вид

$x \otimes y$ для некоторых $x \in U$, $y \in V$? Нет

Возьмем базис в $U \otimes V$ вида $\{e_i \otimes f_j\}$. Тогда

$e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 \neq x \otimes y$. Действительно

Если $e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2 = (\sum a_i e_i) \otimes (\sum b_j f_j)$ то

$$(\textstyle\sum a_i e_i) \otimes (\sum b_j f_j) = \sum_{i,j} a_i b_j \, e_i \otimes f_j$$

Отсюда $a_1 b_1 = 1$, $a_1 b_2 = 0$ (сравниваем коэфф при базисных элементах)

$a_2 b_1 = 0$, $a_2 b_2 = 1$

и $\underbrace{a_1 a_2 b_1 b_2}_{=1 \cdot 1} = 0 \cdot 0$ – противоречие!

Важные наблюдения:

Лемма 1. Пусть $\psi : U \otimes V \to W$ линейное отображение. Тогда формула

(*) $b_\psi(x, y) = \psi(x \otimes y)$ определяет

билинейное отображение $b_\psi : U \times V \to W$.

Это — непосредственно проверяется. Более важно

Лемма 2 Для любого билинейного $b : U \times V \to W$ существует единственное линейное $\psi : U \otimes V \to W$, такое что $b = b_\psi$ или

$$b(x, y) = \psi(x \otimes y).$$

Док: На базисе $\{e_i \otimes f_j\}$ можно (и нужно) взять $\psi(e_i \otimes f_j) = b(e_i, f_j)$ — то есть ψ существует и определено однозначно!

В итоге получаем

Предл. Отображение

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V ; W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{poly\,lin}(U, V ; W)$$

$$\psi \longmapsto b_\psi$$

является изоморфизмом (векторных пространств) (причем естественным изоморфизмом!) ∎

Следствие: Простр. билинейных функций на V

$$\parallel$$

$$\mathrm{Hom}_{\text{poly lin}}(V, V; \Bbbk)$$

$$\cong$$

$$(V \otimes V)^* \quad \text{— то же самое в других обозначениях!}$$

— любую билинейную функцию $b(x, y)$ можно записать через линейную на $V \otimes V$:

$$b(x.y) = l(x \otimes y)\ !$$

Напомню, что если V — конечномерно, то есть отображение $V^* \otimes V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\text{poly lin}}(V.V; \Bbbk)$

по двум линейным на V: $l_1, l_2 \in V^*$ строим билин. ф

$$\binom{*}{*} \quad B_{l_1 . l_2}(x.y) := l_1(x) \cdot l_2(y) \quad \text{и} \quad \underbrace{(l_1, l_2) \longmapsto B_{l_1, l_2}}_{\text{билин. отобр!}}$$

И это отобр устанавливая изоморфизм! т.к "Произведения" элем дуального базиса $(\hat{e}^{(m)})$ к (e_i) дают базис в простр. билин. функций

$$B_{\hat{e}^{(m)}, \hat{e}^{(k)}} \text{ имеет матрицу } \begin{pmatrix} 0 & \vdots & 0 \\ \cdots 0 \cdot & 1 & \cdot 0 \cdots \\ 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \text{ относительно базиса } (e_i)$$

$$\begin{pmatrix} \text{с одной } 1 \\ \text{на месте } (m, k) \\ \text{остальные нули.} \end{pmatrix}$$

Как мы знаем, среди билинейных функций есть симметрические и кососимметрические.

Мы можем переписать формулу $\binom{*}{*}$ в виде $m \otimes l \in V^* \otimes V^*$

$$m \otimes l \longmapsto B_{m \otimes l}$$

$$\text{где } B_{m \otimes l}(x, y) = m(x) \cdot l(y)$$

(и отобр. $B_{\square}$ продолжается на любые тензоры из $V^* \otimes V^*$).

<u>Наблюдение</u>: (а) если $t = m \otimes m$ то B_t — симметрич. бил. функция

(б) если $t = m \otimes l + l \otimes m$, то

$$B_t(x, y) = m(x) \cdot l(y) + l(x) \cdot m(y) \quad \text{— симметрическая бил. ф.}$$

<u>Предл</u>: (а) Для любых U, V определен изоморфизм "перестановки сомножителей"

$$\pi : U \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes U$$

так что $\pi(u \otimes v) = v \otimes u$

(б) $t \in V^* \otimes V^*$ дает симметрическую билин. форму тогда и только тогда, когда $\pi(t) = t$!

Это почти очевидно, но всё-таки давайте разберем.

<u>Док</u> (а) Изоморфизм идущ и определен однозначно

потому что он переводит базис $\{e_i \otimes f_j\}$ для $U \otimes V$
в базис $\{f_j \otimes e_i\}$ для $V \otimes U$:

$$\pi(e_i \otimes f_j) = f_j \otimes e_i$$ — это даёт и сущ. и единств. ■

<u>Док (б)</u> ~~если $\pi(t) = t$, то~~ Заметим, что

$$B_{\pi(m \otimes \ell)}(x, y) = B_{\ell \otimes m}(x, y) = \ell(x) \cdot m(y) =$$
$$= m(y) \cdot \ell(x) =$$
$$= B_{m \otimes \ell}(y, x)$$

— т.е. переставить ~~тензорные~~ сомножители всё равно, что переставить аргументы соответствующей билин. формы!

Отсюда сразу следует (б) ■

Ещё взгляд — координаты: см. 25 доп ⟹

<u>Задача</u>: обобщить всё это на более, чем 2 сомножителя.

$\boxed{\text{I.}}$ Тензорное произведение трёх векторных пространств:

<u>Thes1</u>. Следующие 4 свойства эквивалентны:
Даны вект. простр U, V, S с базисами $\{e_i \mid i \in I\}$ $\{f_j \mid j \in J\}$, $\{h_k \mid k \in K\}$ и три. линейное отображение

$$\varphi: U \times V \times S \longrightarrow W$$

(a) $\{\varphi(e_i, f_j, h_k) \mid i \in I, j \in J, k \in K\}$ — базис W

25доп

Напомним, что там, где есть базис, есть и координаты. Любой тензор $t \in V^* \otimes V^*$ можно записать через координаты:

$$t = \sum_{i,j} t_{ij}\, \hat{e}^{(i)} \otimes \hat{e}^{(j)}$$, где $\{\hat{e}^{(i)}\}$ дуальный базис к $\{e_i\}$ - базису в V.

<u>Предл</u> (продолжение):

(b) $\pi(t) = t \iff$ для любых i, j : $t_{ij} = t_{ji}$

(матрица координат тензора - - симметрическая)

<u>Док.</u> достаточно посчитать $\pi(t)$:

$$\pi(t) = \sum_{i,j} t_{i,j}\, \pi\left(\hat{e}^{(i)} \otimes \hat{e}^{(j)}\right) = \sum t_{ij} \cdot \hat{e}^{(j)} \otimes \hat{e}^{(i)}$$

(переставляем сомножители!)

$$= \sum t_{kl}\, \hat{e}^{(l)} \otimes \hat{e}^{(k)} = \sum t_{ji}\, \hat{e}^{(i)} \otimes \hat{e}^{(j)}.$$

сменили индексы; сменили ещё раз.

Отсюда $\pi(t) = t \iff t_{ij} = t_{ji}$ ∎

(б) $\forall z \in W$ сущ единств. набор $\{x_{jk}\}$ векторов из U

так что $$z = \sum_{j,k} \varphi(x_{jk}, f_j, h_k)$$

(в) … $\exists!$ набор $\{y_{ik}\}$ векторов из V
$$z = \sum_{i,k} \varphi(e_i, y_{ik}, h_k)$$

(г) … $\exists!$ набор $\{s_{ij}\}$ векторов из S
$$z = \sum_{i,j} \varphi(e_i, f_j, s_{ij}).$$

Дольше писать, чем доказывать – полностью аналогично случаю 2х аргументов! $\Rightarrow$ Свойства (а – г) не зависят от выбора базисов

Опр: ~~Три~~. линейное отобр
$$\varphi : U \times V \times S \longrightarrow W$$ задает на W структуру тройного тензорного произведения $W = U \otimes V \otimes S$ если φ обладает свойствами (а – г).

Вместо $\varphi(u, v, s)$ пишут $\underline{u \otimes v \otimes s}$.

Предл. Если есть такие структуры (φ, W) и (φ', W') то есть изоморфизм $W \xrightarrow{\sim} W'$
$$\varphi(u, v, s) \longleftrightarrow \varphi'(u, v, s)$$
(естественный изоморфизм линейных пространств).

Предл: $\mathrm{Hom}_{\text{polylin}}(U, V, S\,;\,T) \cong \mathrm{Hom}(U\otimes V\otimes S,\,T)$

$$\psi \in \mathrm{Hom}(U\otimes V\otimes S,\,T)$$

или по любому линейному отображению ψ строим трилинейное

$$b_\psi(u, v, s) := \psi(u\otimes v\otimes s)$$

и так получаются все и единственным образом.

Доказать самим!

Предл. Если есть три вект. пространства U_1, U_2, U_3 и перестановка $\pi\in S_3$, то определен естественный изоморфизм "перестановки сомножителей"

$$U_1\otimes U_2\otimes U_3 \xrightarrow{\sim} \bigotimes\big(U_i \text{ стоит на месте } \pi(i)\big)$$

Как такое произведение более формально записать?

Что стоит на первом месте — такое i, что $\pi(i)=1$

то есть $i=\pi^{-1}(1)$. Следовательно

$$\bigotimes\big(U_i \text{ стоит на месте } \pi(i)\big) = U_{\pi^{-1}(1)}\otimes U_{\pi^{-1}(2)}\otimes U_{\pi^{-1}(3)}$$

⟨Проверьте для π: $1\to 2 \to 3 \to 1$!⟩. Это пугает, НО

такова "логика формул". Док: "Базис переходит в базис"... ∎

В итоге для конечномерного пространства V мы получим:

<u>Теорема</u>: (а) $V^*\otimes V^*\otimes V^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{polylin}(V, V, V; \Bbbk) \simeq (V\otimes V\otimes V)^*$

(б) форма B_t соответствующая тензору $t \in V^*\otimes V^*\otimes V^*$

симметрическая $\iff$ $\forall \pi \in S_3 : \ \pi(t) = t$

(не меняет значения при любой перестановке аргументов)

(тензор не меняется под действием изоморфизмов перестановки тензорных сомножителей)

(в) тензор $t \in V^*\otimes V^*\otimes V^*$ симметрич.

$\Updownarrow$ $\forall \pi \in S_3$: коорд. не меняются при перест. индексов $t_{i_1, i_2, i_3} = t_{i_{\pi^{-1}(1)}, i_{\pi^{-1}(2)}, i_{\pi^{-1}(3)}}$

<u>Задача</u> Какова размерность подпространства симметрич. тензоров в тройном тензорном произведении $U^{\otimes 3}$ если $\dim U = n$?

(Ясно, что нам можно рассматривать любое U, не только V^*).

<u>Реш.</u> Можно взять какое-нибудь специальное простр., например $U = \{$мн. степени 1 от $x_1, x_2, \dots, x_n\}$

<u>Ключевое утв.</u> Подпростр симметрических тензоров в $U^{\otimes 3}$ изоморфно простр $\{$мн. ст. 3 от $x_1 x_2, \dots, x_n\}$.

<u>Тогда</u> размерность $= \binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$.

Собственно главное — установить изоморфизм, и мы это будем делать следующий раз.

Зато — важное замечание:

<u>Тензорное произведение лин-ных операторов</u>

Пусть $A \in L(\mathcal{U})$, $B \in L(V)$ — лин. операторы.

<u>Предл</u>: Сущ. единственное линейное отображение

$$\psi_{A.B} : \mathcal{U} \otimes V \to \mathcal{U} \otimes V$$
$$u \otimes v \longmapsto (Au) \otimes (Bv)$$

<u>Док</u>: Достаточно заметить, что на базисе $\{e_i \otimes f_j\}$

ψ_{AB} строится как

$$\psi_{A.B}(e_i \otimes f_j) = (Ae_i) \otimes (Bf_j)$$

отсюда и существ., и единственность.

<u>Сл.</u> отображение $L(\mathcal{U}) \times L(V) \to L(\mathcal{U} \otimes V)$

$$(A, B) \longmapsto \psi_{A.B}$$

билинейное и устанавливает для конечномерных $\mathcal{U}, V$

изоморфизм

$$L(\mathcal{U}) \otimes L(V) \xrightarrow{\sim} L(\mathcal{U} \otimes V)$$

$$A \otimes B \longmapsto \psi_{A.B}$$

то есть "допуская вольность", можно писать

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By)$$

— так и делают, говоря что $A \otimes B$ — лин. оператор на $\mathcal{U} \otimes V$.