Лекция 3. [25. 11. 09]

Элементы полилинейной алгебры.

Тензорные произведения.

1) Линейные и полилинейные отображения векторных простр.

Уравнение линейности для $f : V \longrightarrow W$

$$f(a v_1 + b v_2) = a f(v_1) + b f(v_2) \quad \text{где } a, b \in \mathbb{k}, \; v_1, v_2 \in V$$

$\mathrm{Hom}_{lin}(V; W)$ обозначает все линейные отобр из V в W.

Напомним специальный случай, когда $W = \mathbb{k}$, тогда мы говорим о линейных функциях на V

$\mathrm{Hom}_{lin}(V, \mathbb{k}) = V^*$ – более короткое обозначение и название: сопряженное пространство.

Мы знаем, что $\dim V^* = \dim V$.

И если $e_1, \dots, e_n$ – базис V, то для каждого i существует функция $\ell^{(i)}$ такая что

$$\begin{cases} \ell^{(i)}(e_k) = 0 & \text{при } k \neq i \\ \ell^{(i)}(e_i) = 1 & \text{при } k = i \end{cases}$$

сокращенно $\ell^{(i)}(e_k) = \delta^i_k$ где $\delta^i_k := \begin{cases} 0 & i \neq k \\ 1 & i = k \end{cases}$

т.е матрица $(\delta^i_k) = E$ единичная.

Ясно, что $\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(n)}$ образуют базис V^*, который называется базисом дуальным или сопряженным к $\{e_i\}$.

Вспомним, что понятие линейности применялось к функциям двух и более аргументов — мы можем рассматривать функции, линейные по какому-то аргументу (при фиксированных остальных)

или линейные по каждому аргументу.

$F \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{polylin}}(\mathcal{U}, V; W)$ это отображение

$F: \mathcal{U} \times V \to W$ удовлетворяющее 2 тождествам линейности

$$F(au_1 + bu_2, v) = aF(u_1, v) + bF(u_2, v)$$

$$F(u, av_1 + bv_2) = aF(u, v_1) + bF(u, v_2)$$

(и аналогично для большего числа аргументов.)

Такие отображения называют билинейными, (трилинейными или ~~pol~~ поли-линейными.)

Если выбраны базисы $\{e_i\}$ в $\mathcal{U}$, $\{f_j\}$ в V то билинейное отображение F однозначно определяется по наборам (w_{ij}) векторов из W. В частности

Утв: $\dim \mathrm{Hom}_{\mathrm{poly\,lin}}(\mathcal{U}, V; W) = \dim \mathcal{U} \cdot \dim V \cdot \dim W$.

Собственно определение полилинейности можно применять и для бесконечномерных пространств.

Важный пример 1. Отображение пространств многочленов

$$m: \Bbbk[x] \times \Bbbk[y] \longrightarrow \Bbbk[x, y]$$

$$(f(x)\ ;\ g(y)) \longmapsto f(x)\cdot g(y)$$ - произведение

будет билинейным (а отображение "сумма" — нет!).

<u>Пример 2.</u> Тоже вроде произведения

$$\mu: V^* \times V \longrightarrow L(V)$$ - пространство линейных операторов на V

$$\mu(l, v)(x) = l(x)\cdot v$$

Оператор $M = \mu(l, v)$ при $l(v) = 1$ будет проектором всего V на прямую $\Bbbk\cdot v$ вдоль подпространства $\{x \mid l(x) = 0\}$

Конечно, $\operatorname{Im} M = \Bbbk\cdot v$ когда при $l \neq 0$, а если $l(v) = 0$, то M - нильпотентный оператор.

<u>Предл.</u>: Пусть U и V векторные пространства с базисами $\{e_i \mid i \in I\}$, $\{f_j \mid j \in J\}$. Тогда следующие свойства билинейного отображения $\varphi: U \times V \to W$ <u>эквивалентны</u>:

(1) векторы $\{\varphi(e_i, f_j) : i \in I, j \in J\}$ составляют базис W

(2) каждый $z \in W$ для единственного набора $x_j \in U, j \in J$ представляется в виде $z = \sum_{j\in J} \varphi(x_j, f_j)$

(3) каждый $z \in W$ для единственного набора $y_i \in V, i \in I$ равен $z = \sum_{i \in I} \varphi(e_i, y_i)$

(1) $\Leftrightarrow$ (3): Если $z = \sum z_{ij}\,\varphi(e_i f_j)$ – разложен по базису, то

из-за билинейности

$$z = \sum_i \varphi\Big(e_i, \sum_j z_{ij} f_j\Big)$$

и можно взять $y_i = \sum_j z_{ij} f_j$.

Наоборот, если $y_i = \sum_j z_{ij} f_j$ разложение по базису в V,

то верхняя формула следует именно с такими (z_{ij}).

То есть (z_{ij}) однозначно определяют (y_i) и

обратно (координаты y_i) однозначно объединяются в (z_{ij}).

Если $\varphi(e_i, f_j)$ – не базис, то возникают или не единств. наборы (y_i), или для какого-то z – набор (y_i) не существует. Аналогично для (1) $\Leftrightarrow$ (2). ■

<u>Следствие.</u> Выполнение условия (1) не зависит от выбора базисов $\{e_i\}$ и $\{f_j\}$.

<u>Тонкость</u>: Мы можем использовать (алгебраические) базисы в бесконечномерных пространствах:

базис $\{e_i\}$ это система, для которой каждый вектор x однозначно представляется в виде

$$x = \sum a_i e_i$$

и только <u>конечное число</u> коэфф. a_i отлично от нуля!

(тогда и сумма имеет смысл). Предл. <u>остается верным</u>!

Пример 1. m - удовлетворяет (1) и (2) и (3)
это стандартные свойства многочленов!

Пример 2. На самом деле для конечномерного V отображение μ - тоже удовлетворяет (1), (2), (3).
Для этого надо взять базис e_i в V и сопряженный базис $l^{(j)}$ в V^*

Задача Найти матрицу оператора $\mu(l^{(j)}; e_i) =: A$

Ответ: $\text{матр}\, A = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} & 0 & \\ 0 \cdots 0 & 1 & 0 \cdots 0 \\ & 0 & \end{pmatrix} & i \\ j & \end{array}$ (одна 1, остальные 0)

Фундаментальное определение

Тензорным произведением пространств U и V назовём пространство T вместе с билинейным отображением

$$\tau : U \times V \to T$$

такое что τ удовл. свойствам (1), (2), (3) (вернее "на базисах")

Комментарий: Можно считать, что τ удовлетворяет (1), так "симметричнее" и мы знаем, что (1) - не зависит от выбора базисов.

Есть несколько "более ученых" определений, где базисов нет вообще, они лучше для обобщений, но неудобны для начального изучения.

Обычно отображение пишут в виде

$$(u,v) \longmapsto u \otimes v \quad , \text{ а } T = U \otimes V$$

<u>Предл</u> Если есть два тензорных произведения

$$(T_1, \otimes_1) \text{ и } (T_2, \otimes_2) \text{, то имеется}$$

единственный изоморфизм $\psi : T_1 \to T_2$, для

которого

$$\psi(x \otimes_1 y) = x \otimes_2 y$$

<u>Док:</u> Зададим ψ на базисе $e_i \otimes_1 f_j$

$$\psi(e_i \otimes_1 f_j) = e_i \otimes_2 f_j$$

– ясно что это изоморф

т.к. базис переходит в базис. и требуемое свойство <u>выполнено</u> по билинейности!

<u>Предл.</u> Тензорное произведение – существует.

Достаточно взять вект. пространство с базисом

$$\{t_{ij} \mid i \in I, j \in J\} \quad \text{и определить}$$

$$\tau(e_i, f_j) = t_{ij}$$

.

Во многих случаях отображение τ – подразумевается, или мы говорим об изоморфизме формального $\otimes$ с явным простр.

Пример 1. Имеет место изоморфизм

$$\Bbbk[x] \otimes \Bbbk[y] \simeq \Bbbk[x, y]$$

такой, что
$$f(x) \otimes g(y) \longleftrightarrow f \cdot g$$

Пример 2. Имеет место изоморфизм ($\dim V < \infty$)

$$V^* \otimes W \simeq \mathrm{Hom}_{lin}(V, W)$$

где $\varphi \in \mathrm{Hom}_{lin}(V, W)$ переходит в

$$\varphi \longmapsto \sum_i l^{(i)} \otimes \varphi(e_i)$$

(здесь $\{l^{(i)}\}$ дуальный базис для $\{e_i\}$) или

$$(l, w) \longmapsto M \quad \text{такой, что}$$

$$M(x) = l(x) \cdot w.$$

Проверьте! что отображения корректно заданы, взаимно обратны и устанавливают изоморфизм

Указ: можно выбрать алгебраический базис $\{f_j, j \in J\}$ для W.