Мы по-прежнему занимаемся теоремами Силова.

У нас $|G| = q \cdot m$, $q = p^k$, p - простое, $(m, p) = 1$.

Мы рассматривали $\mathcal{M}_q(G)$ - множ всех подмножеств в G из q элементов.

Установлено: • $|\mathcal{M}_q(G)| \equiv m \pmod p$

• если $F \in \mathcal{M}_q(G)$ (т.е $F \subset G$ и $|F| = q$), то

$\to$ $|\operatorname{Stab} F| = q \iff F = (\operatorname{Stab} F) \cdot x_0$, где $x_0 \in F$

F есть смежный класс относительно подгруппы $\underline{\operatorname{Stab} F} \subset G$

и при этом

$|\operatorname{Orb} F| = m$ (число элементов в орбите F)

$\to$ иначе $|\operatorname{Stab} F| < q$ и

$|\operatorname{Orb} F| \equiv 0 \pmod p$.

Рассмотрим $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}_q(G)$ - объединение орбит, число элем которых есть m. Тогда

$$|\mathcal{N}| \equiv |\mathcal{M}_q(G)| \pmod p$$

(число элементов в остальных орбитах делится на p)

Отсюда $|\mathcal{N}| \equiv m \pmod p$

— это нам понадобится.

Отступление: Принцип неподвижных точек.

<u>Теорема</u> Если H – p-группа действует на X, и $|X| \not\equiv 0 \ (p)$, то в X сущ. неподв точка для H.

(то есть $\exists\, x_0 \in X$, $\forall h \in H : h x_0 = x_0$, или $\exists\, x_0 \in X$ такая что $\mathrm{Stab}\, x_0 = H$)

<u>Лемма</u> Пусть $X^H = \{x \in X \mid Hx = x$ или $\mathrm{Stab}\, x = H\}$

Тогда $|X^H| \equiv |X| \pmod p$.

Напомним, H – p-группа, отсюда

если $\mathrm{Stab}\, x \neq H$, то $|H \cdot x| = \dfrac{|H|}{|\mathrm{Stab}\, x|} = \dfrac{p^r}{p^s} \equiv 0 \ (p)$

Число элементов в нетривиальной орбите делится на p! $\Leftarrow$ где $s < r$!

Тем самым мы получаем и утв Леммы, и Теоремы!

Вернемся к нашей ситуации док. т. Силова

Пусть $X = \{F_1, \dots, F_m\} \subset \mathcal{M}_q(G)$ орбита из q элементов.

Мы знаем что стабилизатор например F_1 (и любого F_i)

$S = \mathrm{Stab}\, F_1$ – силовская подгруппа.

<u>Предложение</u>: Пусть H – любая силовская, тогда

$\exists F_i : H = \mathrm{Stab}\, F_i$

<u>Док</u>: Хорошо бы применить принцип неподв. точек:

$\to H \cdot p \cdot$ группа ✓

$\to |X| = m \neq 0$ ✓ значит есть непод. т

Где действие? Но ведь X – орбита – действие на всем $\mathcal{M}_q(G)$ индуцирует действие на X.

Значит $\exists F_i \in X^H$ и $\mathrm{Stab}\, F_i = H$

Заметим – ~~это~~ это значит <u>все</u> силовские появляются как стабилизаторы в одной (любой) орбите из m элементов в $\mathcal{M}_q(G)$,

и значит они <u>сопряжены</u> $\Leftarrow$ [свойство стабилизаторов точек орбиты,]

Это дает $2^{ю}$. т. Силова □

Ну, осталось получить третью т. Силова.

<u>Наблюдение:</u> Если H - силовская подгруппа то $H = \mathrm{Stab}\, F \iff F = Hx_0$ - см. класс

значит есть ровно m таких F (!) и все они лежат в $\mathcal{N}$.

Более того любое $F \in \mathcal{N}$ таково, что его стабилизатор p - силовская ($|\mathrm{Stab}\, F| = q$)

То есть

$$\mathcal{N} = \bigcup_{\substack{H - \text{силовские} \\ p\text{-подгр в } G}} \left\{ \begin{matrix} \text{смежные классы} \\ \text{вида } Hx \end{matrix} \right\}$$

- это разбиение всего $\mathcal{N}$ на непересекающиеся части по m элем в каждой.

Отсюда

$$|\mathcal{N}| = m \cdot (\text{число силовских } p\text{-подгрупп})$$

Вспомним $|\mathcal{N}| \equiv m \pmod p$

Значит число силовских - $\underbrace{N_p \equiv 1 \pmod p}_{\text{3я т. Силова}}$.

N_p - стандартное в этом контексте обозначение для числа силовских p-подгрупп.

Опр: группа G называется простой если она неабелева и в G нет нетривиальных нормальных подгрупп.

(Сл. 2й теоремы: N_p делит $|G|$, — так как они сопряжены, то есть орбита относит. сопряжения)

Заметим: Если $N_p = 1$, то силовская p-подгруппа — нормальна!

Приложение: Существование нормальных подгрупп.

Предл: Пусть $|G| = 12$, тогда либо $S_{(3)}$, либо $S_{(2)}$ — нормальна.

Здесь удобно использовать обозначение

$S_{(p)}$ — (некоторая) силовская p-подгруппа.

Док. Пусть ~~[illegible]~~ $N_3 > 1$ ~~[illegible]~~.

из сравнения и того, что $N_3 \mid 12$ получаем

$N_3 = 4$.

То есть имеем 4 разные циклические подгруппы из 3^x элементов. В каждой ~2 элемента порядка 3.

$\Rightarrow$ число элем порядка $3 = 2 \cdot 4 = 8$ (!)

(каждый элем порядка 3 лежит в силовской 3-подгр)

Остается $12 - 8 = 4$ элемента порядка $\neq 3$.

Но мы знаем, что в G есть 2-силовская – подгруппа из 4^{x} элементов. Получаем, что эти 4 элемента дают такую подгруппу и она только <u>одна</u>; тем самым нормальна.

Обозначим $\Pi_k = \{ g \in G \mid \operatorname{ord} g = k \}$

<u>Предл</u> $|G| = 30$, то есть норм. подгруппа.

<u>Док:</u> Если 5-силовская не нормальна, то $N_5 = 6$

и $|\Pi_5| = 6 \cdot 4 = 24$

Если 3-силовская не нормальна, то $N_3 = 10$

и $|\Pi_3| = 10 \cdot 2 = 20$

Тогда $|\Pi_5 \cup \Pi_3| = 24 + 20 > 30$ – <u>невозможно!</u>

На самом деле наименьший порядок простой группы это 60, и такая группа единственна.

<u>Теорема</u> G простая и $|G| = 60$ то $G \simeq A_5$ – четные перест в S_5

(без док)

Можно установить, что $N_2 = 5$ и

при действии сопряжением реализуются все четные перестановки, но это "чуть длинно".