Вв. Как-то опять получилось, что я читаю у вас алг во 2м модуле.

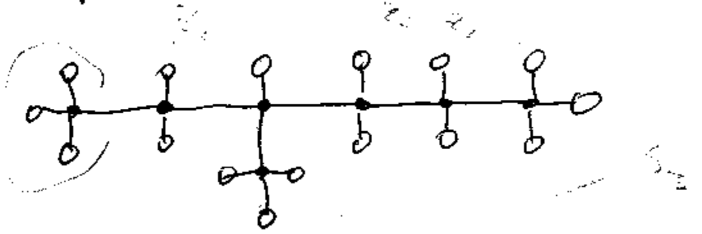
Тема 1 - Группы и действия. Тема 2 - Полилин. Алг. Тема 3 - Линейные представл. гр и алгебр

Группы Винберг стр 149 - 154 ... знать
159 - 164
167 - 175 — сопр. классы и норм. подгруппы; фактор-группы!
175 - 182

Далее мн. стр 418 - 424

Сегодня: Пример использования групп. (Полиа.)

Полиа занимался задачей перечисления молекул. Несколько упрощая рассмотрим например такой вопрос: есть структура атомов углерода



к которой могут подсоединяться "радикалы", которых несколько $R_1, R_2, \dots, R_n$. Сколько можно получить молекул? m?

Здесь 16 мест, так что n^{16} - верхняя оценка.

Реально меньше из-за "симметрий": $G := S_3 \times S_3 \times S_3 \times Z_2 \times Z_2 \times Z_2$

$6^3 \cdot 2^3$

Можно ли сказать, что $m \overset{?}{=} \frac{1}{6^3 \cdot 2^3} n^{16}$ Нет!

не так просто!

Рассмотрим более простой (и менее практический) пример.

Пример 1 Кольцевые ожерелья: Кружки эмалевые ожерелья

- можно вращать, нельзя переворачивать

5 пластинок
n эмалей (красок).

Сколько можно сделать ожерелий?

Реш: $n + \frac{n^5 - n}{5}$. Здесь нам помогает то, что 5 — простое число!

$\parallel$

$\frac{n^5}{5} + \frac{4}{5} n$

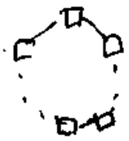
Что делать в более сложном случае??

Идея: Лемма Бернсайда: применить теор. групп.

Давайте обсуждать это на примере.

количество ожерелий. С одной стороны у нас есть | Анализ ↓

"картинки" из n пластинок на определенных местах k цветов



n^k - картинок

обозначим это X

"ожерелья"

две картинки изображают одно и то же ожерелье если $\exists$ поворот $g \in G$

т.е. X/G - орбиты — это наши объекты!

Как считать число орбит?

Рассм $G \times X \supset F = \{(g,x) : gx = x\}$

<u>Наблюдения:</u> ① Есть естественное отображение

$$\pi: F \longrightarrow X$$

где $(g.x) \longmapsto x$

и $\pi^{-1}(x) = \{(g.x) \mid g \in \mathrm{Stab}\, x\}$ – число элементов в прообразе x равно $|\mathrm{Stab}\, x|$ – порядку стабилизатора.

② Пусть $Y \subset X$ орбита нашего действия.

Тогда во-первых для $y_1, y_2 \in Y$

$$\# \pi^{-1}(y_1) = \# \pi^{-1}(y_2) = |\mathrm{Stab}\, y_1| = |\mathrm{Stab}\, y_2|$$

– мы знаем, что стабилизаторы разных точек орбиты имеют одно и то же число элем.

во-вторых

$$\# \pi^{-1}(Y) = |Y| \cdot |\mathrm{Stab}\, y| = |G|$$ по свойству орбит!

Отсюда число орбит

$$|X/_G| = \frac{|F|}{|G|}$$ При этом

$$|F| = \#\{(g.x) \mid gx = x\} = \sum_{g\in G} \#\{x \mid gx = x\}$$

Стандартное обозначение: $\{x \mid gx = x\} =: X^g$ – множ. неподвижных точек для g.

<u>Теорема</u>

$$|X/_G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |X^g|.$$ – формула Бернсайда-Пойа.

Вернемся к нашему примеру.

5 пластинок.

$$|\text{число ожерелий}| = \frac{1}{5}\left(\underset{\uparrow \atop e}{n^5} + \underset{\uparrow \atop \text{нетр. поворотов}}{4\cdot n}\right)$$

6 пластинок

$$|\text{число ожерелий}| = \frac{1}{6}\left(\underset{\uparrow \atop e}{n^6} + \underset{\uparrow \atop 180^\circ}{n^3} + \underset{\uparrow \atop \pm 120^\circ}{2\cdot n^2} + \underset{\pm 60^\circ}{2\cdot n}\right)$$

$e \qquad T^3 \qquad T^2, T^4 \qquad T, T^5$

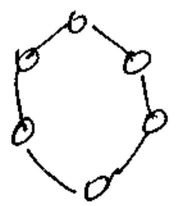
9 пластинок

$$|\text{числ. ожерелий}| = \frac{1}{9}\left(n^9 + 2\cdot n^3 + 6\cdot n\right)$$

Пример 2. Бусы.

можно вращать и отражать

n – типов круглых бусин

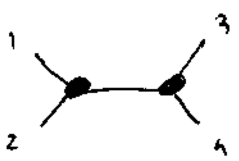


Сколько бус?

$$\frac{1}{12}\left(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n + 3n^4 + 3n^3\right)$$

Q: слагаемые соотв. классам сопр. элементов?

Пример 3 Молекулы



e	n^4
(12)	n^3
(34)	n^3
$(12)(34)$	n^2
$(13)(24)$	n^2
$(14)(23)$	n^2
(1324)	n
(1423)	n

$$\frac{1}{8}\left(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n\right)$$

!

Теорема Силова.

Это существенно относится к конечным группам (хотя есть некоторые обобщения, например на алгебр. группы)

Опр: p-группа — группа, порядок которой есть степень простого числа.

Пусть G - конечная, $|G| = q \cdot m$, где $q = p^k$ и $(q, m) = 1$.

- 1 т. Силова: в G сущ подгруппа порядка q.

Опр: такие подгруппы называются силовскими.

Доп. к 1й теор. Любая p-подгруппа G содержится в некоторой силовской.

- 2 т. Силова: Все силовские подгруппы (любой группы) G — сопряжены.
- 3 т. Силова: Для числа N_p силовских p-подгрупп в G выполнено

$$N_p \equiv 1 \pmod p.$$

Прежде чем доказывать поговорим о действиях.

$\boxed{1}$ Если G действует на мн. множестве X, то G действует на подмножествах X поэлементно.

Например: S_5 действует на парах чисел из $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.
$\sigma = (12)(345)$ то
$\sigma \cdot \{13\} = \{2 4\}$ и т. п.

Ещё Пример: Группа вращений куба действует на парах вершин.
Сколько будет орбит?
- "ребра"
- "диагонали граней"
- "диагонали куба" Есть ли еще?

Замечание Считать орбиты в $V \times V$ труднее!

2. У нас есть особое действие, которое нам будет полезно.

$\forall G$ можно взять $X = G$ и определить действие как произведение: $g \cdot x = gx$ (действие левыми сдвигами)

Пусть $\mathcal{M}(G)$ — подмножества в G и действие поэлементное.

Утв: Если $F \in \mathcal{M}(G)$, то (а) $|\operatorname{Stab} F| \leq |F|$.

(б) В случае равенства — F является смежным классом для подгруппы $\operatorname{Stab} F$.

Действ: возьмем $x \in F$, $g \in \operatorname{Stab} F$, тогда

$$y = gx \in F \quad \text{и} \quad g_1 x = g_2 x \Rightarrow g_1 = g_2$$

(так как это просто умножение в группе!)

отсюда число элементов в F не больше, чем в $\operatorname{Stab} F$.

При равенстве — из одного x получим все $y \in F$.

Замечание Верно ли что $|\operatorname{Stab} F|$ делит $|F|$?

Док. 1й т. Силова Рассмотрим $\mathcal{M}_q(G)$ - подмножества из q элементов

Лемма 1. Число таких подмножеств $\binom{m \cdot q}{q} \equiv m \pmod p$ и значит не делится на p.

Док: Воспользуемся биномом Ньютона в $\mathbb{F}_p$

$$(1+x)^p = 1 + x^p \quad \text{в } \mathbb{F}_p \text{ (или mod } p\text{), не так ли?!}$$

Отсюда: $(1+x)^{p^2} = (1+x^p)^p = 1 + x^{p^2}$ и т.д.

Тогда $(1+x)^{q \cdot m} = (1+x^q)^m = 1 + m \cdot x^q + \ldots$

это и есть $\binom{m \cdot q}{q}$ по модулю p.

<u>Лемма 2</u>. Если $F \in \mathcal{M}_q(G)$ и $|F|\ \ |\mathrm{Stab}\,F|$ то число элементов в орбите F делится на p.

Действ.: $\left|\begin{matrix}\text{число элем}\\ \text{в орбите}\end{matrix}\right| = \dfrac{|G|}{|\mathrm{Stab}\,F|} = \dfrac{m\cdot p^k}{\boxed{}} \equiv 0 \ (p)$

число, которое $< p^k = q = |F|$

<u>Заключаем</u>: Существуют $F \in \mathcal{M}_q(G)$, для

которых $|F| = |\mathrm{Stab}\,F|$ ← это и есть подгруппа порядка $q = p^k$ силовская!

(т. как по Л.1. все орбиты не могут делиться на p в $\mathcal{M}_q(G)$)

Заметим, что для каждой силовской $S \subset G$ мы получим m смежных классов вида $Sx = F$ — и это <u>все</u> F, для которых $\mathrm{Stab}\,F = S$ (и таких m штук). Отсюда мы можем заключить, что число силовских N_p будет удовлетворять сравнению $m\cdot N_p \equiv |\mathcal{M}_q(G)| \equiv m \ (p)$ т. е. $N_p \equiv 1 \pmod p$. Впрочем, обычно приводят другое, отдельное доказательство, (может быть) и я его расскажу позже